Polytech Lyon, MAM3A, 2023-2024

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 1

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

a) Soit $f_1 : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_1(x) = (x^4+3x-1)e^{-3x}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Montrer que f_1 est intégrable Lebesque.

b) Soit $f_2 :]0,2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_2(x) = \frac{\sin^2(2x)}{x^{7/3}(5x+2)}, \quad \forall\, x \in]0,2]$$

Montrer que f_2 est intégrable Lebesque.

c) Soit $f_3 :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_3(x) = \frac{x^3-3x+5}{(x^3+2)\sqrt{x}}, \quad \forall\, x \in]1,+\infty[.$$

Montrer que f_3 n'est pas intégrable Lebesgue.

d) Soit $f_4 :]0,3] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_4(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{x^2}, \quad \forall\, x \in]0,3].$$

Montrer que f_4 n'est pas intégrable Lebesgue.

Exercice 2.

On considère deux nombres $a, b > 1$ et nous notons par D l'ouvert dans $\mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = ax,\ y = \frac{x}{a},\ y = \frac{b}{x}$ et $y = \frac{1}{b\,x}$ dans $\mathbb{R}^2_+$. Autrement dit, on a

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x > 0,\ y > 0, \quad \frac{x}{a} < y < a\,x,\ \frac{1}{b\,x} < y < \frac{b}{x}\}.$$

On se propose de calculer $\lambda_2(D)$ en utilisant la formule $\lambda_2(D) = \int_D 1 dxdy$ et en faisant le changement des variables $x = \frac{u}{v},\ y = uv$.

On considère alors l'ouvert $E =]\frac{1}{\sqrt{b}}, \sqrt{b}[\times]\frac{1}{\sqrt{a}}, \sqrt{a}[$ dans $\mathbb{R}^2$ et la fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{u}{v} \\ uv \end{pmatrix}, \quad \forall\,(u,v) \in E.$$

a) Faire un dessin (approximativ) de l'ensemble D avec les courbes qui le délimitent.

b) Montrer que $\varphi(E) = D$ et que φ est une bijection de E dans D.

Indication: montrer que pour tout $(x,y) \in D$ il existe un unique $(u,v) \in E$ tel que $(x,y) = \varphi(u,v)$.

c) Montrer qu'on peut appliquer la formule de changement des variables et qu'on peut écrire $\lambda_2(D)$ comme une intégrale sur E.

d) Calculer $\lambda_2(D)$ en utilisant le Théorème de Fubini 2D sur E.

Exercice 3.

Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x) \geq 0,\ \forall\, x > 1$. On suppose qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$\int_1^{+\infty} e^{nx} f(x)\, dx \leq M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que $f(x) = 0$ *presque pour tout* $x \in]1, +\infty[$

Indication: utiliser le Théorème de Beppo-Levi.

b) Supposons en plus que f est une fonction continue. Montrer que $f(x) = 0,\ \forall\, x > 1$.