Polytech Lyon, MAM3A, 2023-2024

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 2

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

Pour chacune des applications suivantes définies sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ trouver l'ensemble $V \subset U$ telle que l'application respective soit dérivable sur V et calculer sa dérivée.

(1)

$$z \quad \mapsto \quad z^3 + 1 - \frac{4}{z(z+i)} \quad (\text{avec } \; U = \mathbb{C} \setminus \{0, -i\})$$

(2)

$$z \mapsto Re(z) \quad (\text{avec } \; U = \mathbb{C})$$

(3)

$$z \mapsto z\, Im(z) \quad (\text{avec } \; U = \mathbb{C})$$

Exercice 2.

Dans un repère $(Oxyz)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ on considère la paramétrisation C^1 donnée par $([0, 2\pi],\ \gamma)$ avec

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 + \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \forall\, t \in [0, 2\pi].$$

Nous notons par Γ la courbe associée à γ, c'est à dire $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$ (remarquer que Γ est dans la partie $x \geq 0$ du plan $y = 0$ de l'espace $\mathbb{R}^3$).

Nous notons par S la surface de révolution de la courbe Γ autour de l'axe vertical Oz (cette surface s'appelle **tore de révolution**; c'est un sorte de tube courbé refermé sur lui-même, penser à une bouée de sauvetage!).

Nous construisons la nappe paramétrée de support S suivante: $(\overline{D}, \varphi)$ avec $D =]0, 2\pi[\, \times\,]0, 2\pi[$ et $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\varphi(\theta, t) = \begin{pmatrix} (2 + \cos t)\ \cos\theta \\ (2 + \cos t)\ \sin\theta \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \forall\ (\theta, t) \in \overline{D}.$$

On considère aussi une fonction à valeurs scalaires $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Quelle est la courbe Γ? Faites un dessein approximatif de Γ et de S.

b) Calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Montrer que

$$\left\| \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big)(\theta, t) \right\| = 2 + \cos t, \quad \forall\, (\theta, t) \in \overline{D}.$$

c) Trouver les points réguliers de φ et calculer, pour ces points réguliers, le vecteur normal ν à la nappe φ.
d) Calculer l'aire de φ.
e) Calculer l'intégrale de surface de V sur φ, c'est à dire calculer $\int_\varphi V(x)\, d\sigma$.

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$, $([a,b],\gamma)$ une paramétrisation de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$ et notons $\Gamma = \gamma([a,b])$ le support de γ. On suppose que $\gamma'(t) \neq 0,\ \forall\, t \in [a,b]$ (donc la paramétrisation $([a,b],\gamma)$ est régulière).
Soit L la longueur de γ.
On considère l'application $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\phi(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau, \quad \forall\, t \in [a,b]$$

($\phi(t)$ représente la longueur de la portion de la courbe Γ comprise entre $\gamma(a)$ et $\gamma(t)$; le nombre réel $\phi(t)$ s'appelle **coordonnée courviligne** sur Γ).
a) Montrer que ϕ est de classe C^1 et que $\phi'(t) > 0,\ \forall\, t \in [a,b]$.
b) Montrer que ϕ est une bijection de $[a,b]$ dans $[0,L]$.

c) On notera alors par ϕ^{-1} la reciproque de ϕ, avec $\phi^{-1} : [0,L] \to [a,b]$.
On introduit la fonction $\theta : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\theta(s) = \gamma(\phi^{-1}(s)), \quad \forall\, s \in [0,L].$$

Montrer que θ est de classe C^1 et que les paramétrisations $([a,b],\gamma)$ et $([0,L],\theta)$ sont équivalentes.
(On dira alors que θ est une **paramétrisation par coordonnées courvilignes** de Γ).
d) Montrer que pour tout $t \in [a,b]$ le vecteur $\theta'(s)$ est colinéaire avec $\gamma'(t)$ et que $\|\theta'(s)\| = 1$, où nous posons $s = \Phi(t)$.