Polytech Lyon, MAM3A, 2023-2024

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur (MMI)

Partiel 3

Durée 1h30 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.
On se donne $f \in \mathcal{L}_a,\ m \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \cdots a_{m-1} \in \mathbb{R}$. On se propose de trouver $y \in C^m([0, +\infty[)$ avec $y, y', \cdots y^{(m)} \in \mathcal{L}_a$ solution de l'équation différentielle

$$a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{m-1} y^{(m-1)} + y^{(m)} = f \quad \text{sur } [0, +\infty[\tag{1}$$

avec conditions initiales

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(m-1)}(0) = 0. \tag{2}$$

On notera dans la suite

$$G = \mathcal{L}(y) \quad \text{et} \quad F = \mathcal{L}(f).$$

a) Montrer que si y est solution de (1) et (2) alors sa transformée de Laplace G satisfait l'équation algébrique

$$P(s)G(s) = F(s) \qquad \forall\, s \in \mathbb{C} \text{ avec } Re(s) > \max\{\xi_a(f),\, \xi_a(y)\}$$

où $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est le polynome complexe

$$P(s) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k s^k + s^m, \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

b) Dans cette partie on suppose que les racines de P sont simples, c'est à dire, le polynome P admet la décomposition suivante en facteurs:

$$P(s) = (s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m), \quad \forall\, s \in \mathbb{C}$$

où les racines complexes $z_1, z_2, \cdots z_m$ sont deux à deux distinctes ($z_i \neq z_j$ si $i \neq j$).
On admet qu'on a la décomposition suivante en fractions simples:

$$\frac{1}{P(s)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{s - z_k} \qquad \forall\, s \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \cdots z_m\}.$$

avec $b_1, b_2, \cdots b_m \in \mathbb{C}$.

b1) Trouver les coefficients $b_1, b_2, \cdots b_m$ en fonction des $z_1, z_2, \cdots z_m$.

b2) Donner la solution y de (1) et (2) en l'écrivant comme une convolution entre deux fonctions à préciser.

c) Application: Trouver $y \in C^2([0, +\infty[)$ avec $y, y', y'' \in \mathcal{L}_a$ solution de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 3y = e^{-t} \quad \text{sur} \quad [0, +\infty[$$

avec conditions initiales

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Calculer $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

Exercice 2.

Pour chacune des applications suivantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, précisez (en justifiant) si elles sont bien définies et si elles sont des distributions.

a) $\varphi \;\to 2\int_{\mathbb{R}} x\,\sin(x)\,\varphi(x)\,dx$

b) $\varphi \;\to 4\varphi(0) - \varphi'(1)$

c) $\varphi \;\to 2\varphi(1) + \int_{\mathbb{R}}(x-1)\varphi(x)\,dx$

d) $\varphi \;\to \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-3)^2}\varphi(x)\,dx.$

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f \in \mathcal{L}_a$. On considère aussi la fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $a(t) = tH(t),\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ où H est la fonction de Heaviside $H = 1_{[0,+\infty[}$.

a) Montrer que la convolution $a * f$ est bien définie et est un élément de $\mathcal{L}_a$. On notera dans la suite $u = a * f$.

b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que si on considère le demi-plan complexe $D_\alpha = \{s \in \mathbb{C},\ Re(s) > \alpha\}$ alors

$$s^2\mathcal{L}(u)(s) = \mathcal{L}(f)(s), \quad \forall\, s \in D_\alpha.$$

c) Montrer qu'on peut définir la distribution régulière $T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ associée à u.

d) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction test. Montrer qu'on a

$$\langle (T_u)'' \,,\ \varphi\rangle \;=\; \int_0^\infty f(t)\int_t^\infty (x-t)\varphi''(x)\,dx\,dt.$$

e) En déduire l'égalité

$$(T_u)'' = T_f \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$