Corrigé Partiel Optimisat 2017-2018

Exo 1.

a) Sur U ~~...~~ f est le produit entre 2 fonctions C^∞ : la fonction $x \to \|x\|^\alpha$ ~~...~~ $= (\|x\|^2)^{\alpha/2} \in C^\infty(U)$ (vu en TD)

et

$x \to x_1 + x_2$ linéaire donc C^∞

Donc $f \in C^\infty(U)$, $\forall i = 1,2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \|x\|^\alpha + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\|x\|^2\right)^{\alpha/2}}_{= \frac{\alpha}{2}(\|x\|^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot 2x_i}(x_1 + x_2)$$

donc $\forall i = 1,2$

$$(1)' \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \|x\|^\alpha + \alpha \|x\|^{\alpha-2}(x_1+x_2)\, x_i$$

donc

$$\nabla f(x) = \|x\|^\alpha \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha\|x\|^{\alpha-2}(x_1+x_2)\, x. \quad \forall x \in U.$$

b). On utilise $|x_i| \le \|x\|$, $\forall i = 1,2$.

$$|f(x)| \le \|x\|^\alpha \underbrace{(|x_1| + |x_2|)}_{\le 2\|x\|} \le 2\|x\|^{\alpha-1}$$

Alors $f(x) \to 0 = f(0)$ si $x \to 0$ si $\alpha > -1$.

Donc si $\alpha > -1$ alors f est continue.

Supposons $\alpha \le -1$.

Prendre $x_1 = \frac{1}{n}$ et $x_2 = 0$, $\Rightarrow \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}$

$f(\frac{1}{n}, 0) = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \not\to 0$ si $\alpha \le -1$

donc si $\alpha \le -1$ alors f est non continue en 0.

c) On utilise $(1)'$. On a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \le \|x\|^\alpha + \alpha\|x\|^{\alpha-2}\Big(\underbrace{|x_1|}_{\le\|x\|} + \underbrace{|x_2|}_{\le\|x\|}\Big) \cdot \underbrace{|x_i|}_{\le\|x\|}$$

$$\le \|x\|^\alpha + 2\alpha\|x\|^{\alpha-2}\|x\|^2$$

$$= \|x\|^\alpha + 2\alpha\|x\|^\alpha$$

Si $\alpha > 0$ alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \longrightarrow 0$ si $x \to 0$

Alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ existe $= 0$ et $\forall i = 1,2$

et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

+ De plus f cont $\|f(x)\| \le 2\|x\|^\alpha\|x\| \to 0$ si $\|x\| \to 0$.

a) $\nabla(\|x\|^3) = \nabla\left((\|x\|^2)^{3/2}\right) = \frac{3}{2}(\|x\|^2)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\nabla(\|x\|^2)}_{=2x}$

$= 3\|x\| \cdot x.$

$\nabla(\langle Ax, x\rangle) = Ax$ (car A est symétrique)

$\nabla(\langle b, x\rangle) = b$

donc

$\nabla f(x) = 3\|x\| x + Ax - b$

donc

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 3\|x\| x_i + (Ax)_i - b_i$

~~Pour calculer~~ $\cancel{\nabla^2 f(x)}$

D'autre part

$\nabla^2 f(x) = J_{\nabla f}(x)$

On sait : $J_{Ax-b} = A$. il faut calculer

Pour calculer $J_{\|x\|x}$

$\frac{\partial}{\partial x_j}(\|x\| x_i)$ $\forall i,j = 1 \dots n.$

On a :

$\frac{\partial}{\partial x_j}(\|x\| x_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\|x\|) x_i + \|x\| \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i)}_{=\delta_{ij}}$

et

$\frac{\partial}{\partial x_j}(\|x\|) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left((\|x\|^2)^{1/2}\right) = \frac{1}{2}(\|x\|^2)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\|x\|^2)}_{=2x_j}$

$= \frac{x_j}{\|x\|}$

Alors

$\frac{\partial}{\partial x_j}(\|x\| x_i) = \frac{1}{\|x\|} x_i x_j + \|x\| \delta_{ij}$

Alors

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = A_{ij} + \underbrace{\frac{3}{\|x\|} x_i x_j}_{\text{prolongé par 0 par continuité en } x=0} + 3\|x\| \delta_{ij}$, $\forall i,j = 1 \dots n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Alors $\nabla^2 f(x) = A + \frac{3}{\|x\|} x \cdot x^T + 3\|x\| I_n$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

c'est pour d)

b) On va montrer que f est coercive sur $\mathbb{R}^n$; comme f est continue (car $f \in C^2$) on a le résultat.

Majorations :

$|\langle Ax, x\rangle| \le \|Ax\| \cdot \|x\| \le \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|x\|$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$|\langle Ax, x\rangle| \le \|A\| \cdot \|x\|^2$

et aussi $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$|\langle b, x\rangle| \le \|b\| \cdot \|x\|$

Alors on ~~minore f~~ :

$\langle Ax, x\rangle \geq -\|A\| \|x\|^2$

$-\langle b, x\rangle \geq -\|b\| \cdot \|x\|$

ce qui permet de minorer f : $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$f(x) \geq \|x\|^3 - \frac{1}{2}\|A\| \cdot \|x\|^2 - \|b\| \cdot \|x\|$

donc si $x \neq 0$

$$f(x) \geq \|x\|^3 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\|A\| \frac{1}{\|x\|} - \|b\| \frac{1}{\|x\|^2}\right)}_{\to 1 \text{ si } \|x\| \to \infty}$$

donc $f(x) \to +\infty$ si $\|x\| \to +\infty$.

c1) x^0 satisfait l'équation d'Euler :

$\nabla f(x^0) = 0$ donc

(2)' $3\|x^0\| x^0 + Ax^0 - b = 0$

Si $x^0 = 0$ alors $b = 0$ contradiction

donc $x^0 \neq 0$.

c2) On regarde la i-ème composante de (2)'

$3\|x^0\| x_i^0 + \cancel{Ax} \; A_{ii} x_i^0 - b_i = 0$

car $A_{ij} = 0$ si $j \neq i$,

donc

(3)' $\underbrace{(3\underbrace{\|x^0\|}_{>0} + \underbrace{A_{ii}}_{\geq 0})}_{>0} x_i^0 = b_i \quad , \forall i = 1, 2 \ldots n.$

~~On regarde la i-ème composante de (3)'~~ :

Si $i \geq 2$ en $(3)'$ alors $b_i = 0$.

Alors on obtient $x_i^* = 0$ si $i \geq 2$. (car $3\|x^*\| + A_{ii} > 0$)

Il nous reste à résoudre ~~Comme $|x^*| = |x_1|$~~

$(3\|x^*\| + \underbrace{A_{11}}_{=0})\, x_1^* = b_1$

alors c'est équivalent à :

Comme $|x^*| = |x_1|$

$3|x_1|\, x_1^* = b_1 \cancel{\neq 0} > 0$

~~Si $b_1 > 0$ alors $x_1 > 0$ et on résoud. $3(x_1^*)^2 = b_1$ donc $x_1^* = \sqrt{\frac{b_1}{3}} > 0$~~

~~si $b_1 < 0$ alors $x_1^* < 0$ et on résoud. $-3(x_1^*)^2 = b_1$ $\Rightarrow x_1^* = -\sqrt{\frac{b_1}{-3}} < 0$~~

~~Alors $x_1^* > 0$~~ On en déduit $x_1 > 0$.

On doit résoudre $3(x_1^*)^2 = b_1$ ce qui donne $x_1 = \sqrt{\frac{b_1}{3}}$

donc x^* est unique : $x^* = \sqrt{\frac{b_1}{3}}\, e_1$

d) On a calculé $\nabla^2 f(x)$ en a)

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ arbitraire

$\langle \nabla^2 f(x) h, h \rangle = \underbrace{\langle Ah, h \rangle}_{\geq 0}$ (hypothèse) $+ \frac{3}{\|x\|} \underbrace{\langle x \cdot x^T h, h \rangle}_{= \langle x^T h, x^T h \rangle = \|x^T h\|^2 \geq 0}$

$+ 3\|x\| \underbrace{\langle I_n h, h \rangle}_{= \|h\|^2 \geq 0}$

donc $\langle \nabla^2 f(x) h, h \rangle \geq 0 \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n$

donc f est convexe.