Polytech Lyon, MAM3A 2017 - 2018

Optimisation Continue

Partiel - mai 2018

Durée 1h et 10 min. - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Partout dans cet énoncé $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

Exercice 1.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \|x\|^\alpha (x_1 + x_2) & \text{si} \quad x = (x_1, x_2) \in U \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe C^∞ sur U et calculer $\nabla f(x)$, $\forall\, x \in U$.
b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha > -1$.
c) Montrer que si $\alpha > 0$ alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.
On se donne $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur avec $b \neq 0$.
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \|x\|^3 + \frac{1}{2} < Ax\,,\, x > - < b\,,\, x >, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

a) On admet sans preuve que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$; calculer ∇f sur $\mathbb{R}^n$.
b) Montrer que f est coercive sur $\mathbb{R}^n$ et en déduire que f admet au moins un point de minimum sur $\mathbb{R}^n$.
Indication: utiliser l'inégalité $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$ où $\|A\|$ est la norme subordonnée de A.
c) On suppose ici que A est une matrice diagonale, avec

$$A_{11} = 0 \quad \text{et} \quad A_{ii} \geq 0, \quad \forall\, i \in \{2, \cdots n\}.$$

On suppose aussi

$$b_i = 0, \quad \forall\, i \in \{2, \cdots n\} \quad \text{et} \quad b_1 > 0.$$

On notera par x^* un point de minimum arbitraire de f.
c1) Ecrire l'équation satisfaite par x^* et montrer que $x^* \neq 0$.
c2) Trouver x^* et montrer qu'il est unique.
d) On suppose ici que A est une matrice positive (*rappel:* $< Ah, h > \geq 0, \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n$).
En calculant éventuellement $\nabla^2 f$, montrer que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^n$.