Corrigé Partiel Optimisation 2018-2019 MAM3A

Exercice 1.

a) On introduit les fonctions

$g :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longrightarrow g(y) = \frac{1}{2}\, y \ln(y)$

$\varphi : U \longrightarrow]0, \infty[$

$x \longrightarrow \varphi(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2$

Alors la restriction de f sur U s'écrit

$f/U = g \circ \varphi$ $\quad f(x) = g(\varphi(x)), \ \forall x \in U$

les fonctions g et φ sont clairement dans C^∞ donc $f \in C^\infty(U)$

$\nabla f(x) = g'(\varphi(x))\, \nabla \varphi(x)$, $\forall x \in U$.

$g'(y) = \frac{1}{2}\left(\ln y + y\, \frac{1}{y}\right)$ donc

$g'(y) = \frac{1}{2}(\ln y + 1)$, $\forall y > 0$

Comme $\varphi(x) = \langle I_n x, x\rangle$ alors $\forall x \in U$.

$\nabla \varphi(x) = 2 I_n x = 2x$,

Donc

$\nabla f(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(\|x\|^2) + 1\right] \cdot 2x = \left[\ln(\|x\|^2) + 1\right] x$, $\forall x \in U$

On note $\psi(x) = \ln(\|x\|^2) + 1$ $\quad \psi : U \longrightarrow \mathbb{R}$

~~Pour calculer~~ $\cancel{\nabla^2 f(x)}$ ~~on utilise la formule~~

On a

$\nabla^2 f(x) = J_{\nabla f}(x)$

et comme avec $\psi \in \mathbb{R}$ on utilise la formule

$\nabla f(x) = \psi(x)\, x$

$J_{\nabla f}(x) = \psi(x)\, J_x(x) + x\, J_\psi(x)$

On a : $J_x(x) = I_n$

Pour calculer J_ψ on procède comme pour le calcul de J_φ

$\psi = h \circ \varphi$ avec $h : U \longrightarrow]0, \infty[$

$y \longrightarrow h(y) = \ln(y) + 1$

$J_\psi(x) = h'(\psi(x))\, J_\varphi(x)$

$h'(y) = \frac{1}{y} \quad , \forall y > 0$ et $J_\varphi(x) = \nabla^T \varphi(x) = 2x^T$

donc

$J_\psi \varphi(x) = \frac{1}{\|x\|^2} \cdot 2x^T$

On déduit alors $\quad , \forall x \in U.$

$$\nabla^2 f(x) = [\ln(\|x\|^2) + 1] I_n + \frac{2}{\|x\|^2} x x^T$$

b) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = [\ln(\|x\|^2) + 1] x_i \quad \forall x \in U, \; i \in [\![1, n]\!]$

On a

$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq$ ~~$[\ln(\|x\|^2)+1] \cdot |\ln(\|x\|^2)| \cdot \|x\| + \|x\|$~~ $\quad$ (car $|x_i| \leq \|x\|$)

$\leq |\ln(\|x\|^2) + 1| \cdot \|x\|$

$\leq 2|\ln(\|x\|)| \, \|x\| + \|x\| \longrightarrow 0$ si $\|x\| \longrightarrow 0$

Nous savons que $\ln(\|x\|) \cdot \|x\| \longrightarrow 0$ si $x \longrightarrow 0$

Donc

$2|\ln(\|x\|)| \, \|x\| + \|x\| \longrightarrow 0 \quad , \forall i = 1 \ldots n$

Alors $\exists \lim_{x \to 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$

Alors $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $\nabla f(0) = 0$

c) prendre ~~$x = \frac{1}{p}$~~ une suite $\{x_p\} \subset \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}^*$

$x_p = \frac{1}{p} e_1 \Rightarrow \|x_p\| = \frac{1}{p}$

$(\nabla^2 f(x_p))_{11} = \ln\left(\frac{1}{p}\right) + 1 + \frac{2}{\left(\frac{1}{p}\right)^2} \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = 3 + \ln\left(\frac{1}{p}\right)$

$(\nabla^2 f(x_p))_{11} \longrightarrow -\infty$ si $p \to +\infty$

Donc $f \notin C^2(\mathbb{R}^n)$

d) ~~Soit $\beta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|$~~

~~$\ln(\|x\|^2) + 1 \geq 0$~~ $\quad \|x\| \geq \beta$; donc

si $x \in \mathbb{R}^n - B(0, \beta)$ alors

$\ln(\|x\|^2) + 1 = 2\ln(\|x\|) + 1 \geq 2\ln\beta + 1$

Prendre $\beta > 0$ tel que c'est à dire

$2\ln\beta + 1 \geq 0$

$\ln\beta \geq -\frac{1}{2} \iff \beta \geq e^{-1/2}$

Donc si $\beta \geq e^{-1/2}$ alors
$\ln(\|x\|^2)+1 \geq 0$ si $\|x\| \geq \beta$.

Soit $w \in \mathbb{R}^n$ arbitraire

Alors

$$\langle \nabla^2 f(x) w, w\rangle = \left(\ln(\|x\|^2)+1\right) \underbrace{\langle I_n w, w\rangle}_{=\|w\|^2} +$$

$$+ \frac{2}{\|x\|^2} \langle x x^T w, w\rangle$$

$$= \left(\ln(\|x\|^2)+1\right)\|w\|^2 + \frac{2}{\|x\|^2} \|x^T w\|^2$$

Alors $\forall x \in A$, $\forall w \in \mathbb{R}^n$

$\langle \nabla^2 f(x) w, w\rangle \geq 0$

si $A \subset \mathbb{R}^n - B(0,\beta)$ et si $\beta \geq e^{-1/2}$.

Ceci montre que f est convexe sur A.

Exercice 2.

a) c'est très classique

$f(x) = \varepsilon \langle I_n x, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

f forme quadratique, donc $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\nabla f(x) = 2\varepsilon I_n x + Ax - b$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$\nabla^2 f(x) = 2\varepsilon I_n + A$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$\nabla^2 f(x)$ independent de x

b) Si $w \in \mathbb{R}^n$ arbitraire alors

$$\langle \nabla^2 f(x) w, w\rangle = 2\varepsilon \underbrace{\langle I_n w, w\rangle}_{=\|w\|^2} + \underbrace{\langle Aw, w\rangle}_{\geq 0}$$

$$\geq \underbrace{2\varepsilon}_{>0}\|w\|^2$$ donc f fortement convexe

Alors par un théorème de cours : existence et unicité d'un point de minimum x^*.

c) x^* satisfait l'equation d'Euler

$\nabla f(x^*) = 0$ donc

$2\varepsilon x^* + A x^* = b$

d) $\frac{2\varepsilon}{100}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{50} x_1^* + x_1^* = 0 \\ \frac{1}{50} x_2^* + 0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 50. \end{cases}$