Polytech Lyon, MAM3A 2018 - 2019

Optimisation Continue

Partiel - mai 2019

Durée 1h et 10 min. - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Partout dans cet énoncé $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|^2 \ln(\|x\|) & \text{si} \quad x \in U \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

où on pose $U = \mathbb{R}^n - \{0\}$.

a) Montrer que f est de classe C^∞ sur U et calculer $\nabla f(x)$ et $\nabla^2 f(x)$, $\forall\, x \in U$.
Indication: n'oubliez pas que $\ln y = \frac{1}{2}\ln(y^2)$, $\forall\, y > 0$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et calculer $\nabla f(0)$.
Indication: On peut utiliser la limite bien connue:

$$\lim_{y \to 0^+} y^\alpha \ln y = 0, \quad \forall\, \alpha > 0.$$

c) Montrer que f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

d) Montrer qu'il existe $\beta > 0$ assez grand tel que pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ convexe et ouvert avec en plus $A \subset \mathbb{R}^n - B(0,\beta)$ la fonction f est convexe sur A.

Exercice 2.

On se donne $n \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon > 0$, $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et semi-définie positive (*Rappel:* $< Aw, w > \ \geq 0, \quad \forall\, w \in \mathbb{R}^n$).
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \epsilon\|x\|^2 + \frac{1}{2} < Ax\,,\, x > \ - \ < b\,,\, x >, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

a) Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et calculer ∇f et $\nabla^2 f$.

b) Montrer que f est fortement convexe et en déduire l'existence et l'unicité d'un point de minimum de f sur $\mathbb{R}^n$; on va noter par x^* ce point de minimum.

c) Ecrire l'équation qui permet de trouver x^*.

d) Trouver x^* dans le cas particulier

$$n = 2, \qquad \epsilon = \frac{1}{100}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$