Corrigé Partiel Optimisation 2020-2021

Exercice 1.

a) On a : $|x_1+x_2| \le |x_1|+|x_2| \le 2\|x\|$ donc

$|f(x)| \le 2\|x\|^{\alpha+1}$ si $x \neq 0$.

Alors si $\alpha > -1$ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc f continue en 0

On sait que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

si $\alpha \le -1$

Prendre $x = x^{(k)} = \frac{1}{k} e_1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, $k \to \infty$: $\|x^{(k)}\| = \frac{1}{k}$

$f(x^{(k)}) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha} = k^{-\alpha-1}$

Donc si $\alpha \le -1$ $f(x^{(k)}) \not\to 0 = f(0)$ donc pas continue sur $\mathbb{R}^2$

donc f n'est pas continue en 0

Conclusion f continue sur $\mathbb{R}^2$ ssi $\alpha > -1$

b) Si $x \neq 0$ alors ~~V~~ pour tout $i \in \{1,2\}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1.\|x\|^{\alpha} + (x_1+x_2)\frac{\partial}{\partial x_i}(\|x\|^{\alpha}) \quad \text{(vu en TD 1)}$$

$$= \|x\|^{\alpha} + (x_1+x_2)\,\alpha\,\|x\|^{\alpha-2} x_i$$

Alors i) Si $\alpha > 0$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \le \|x\|^{\alpha} + 2\|x\||\alpha|\|x\|^{\alpha-2}\|x\| \le (1+2|\alpha|)\|x\|^{\alpha} \to 0 \text{ si } \cancel{\alpha>0 \text{ et}}\ x \to 0$$

(car $\alpha > 0$)

~~donc~~ Par un résultat vu en ~~TD~~ polycopié : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$, $i = 1,2$

f est de classe C^1 ~~sur~~ $\mathbb{R}^2$ et

~~En plus $\nabla f(x) = \|x\|^{\alpha} + \alpha(x_1+x_2)$~~

ii) Si $\alpha = 0$ $\forall i = 1,2$ et $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

donc aussi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

En plus pour $\alpha > 0$

$$\nabla f(x) = \begin{cases} \|x\|^{\alpha} + \cancel{2\alpha\|x\|}\ \alpha(x_1+x_2)\|x\|^{\alpha-2}\,x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et

$$\nabla f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

si $\alpha = 0$

Exo 2.

a)

a1) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,1]$. Alors

$\varphi(tx+(1-t)y) = g(f(tx+(1-t)y))$

Mais $f(tx+(1-t)y) = A(tx+(1-t)y) + b =$

$= t\,Ax + (1-t)Ay + tb + (1-t)b \quad = t f(x) + (1-t) f(y)$

Alors

$\varphi(tx+(1-t)y) = g(t f(x) + (1-t) f(y)) \leq t\, g(f(x)) + (1-t) g(f(y))$

(par convexité de g) $\quad = t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$

Donc φ convexe

a2) Pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$ on a

$\langle \nabla^2 \varphi(x) h, h\rangle = \langle A^T \nabla^2 g(f(x)) A h, h\rangle =$ p.

$\langle \nabla^2 g(f(x)) Ah, Ah\rangle \quad = \langle \nabla^2 g(f(x)) z, z\rangle \geq 0$

(On pose $z = Ah$)

car g est convexe.

b) Comme g est fortement convexe alors $\exists\, \alpha > 0$ tel que

$\forall x, h \in \mathbb{R}^n$ on a

~~$\langle \nabla^2 \varphi(x) h, h\rangle \geq \alpha\, t$~~

(*) $\quad \langle \nabla^2 g(f(x)) Ah, Ah\rangle \geq \alpha \|Ah\|^2$

Mais $\|Ah\|^2 = \langle Ah, Ah\rangle = \langle A^T A h, h\rangle$ ~~$\geq \lambda_{min} \|h\|$~~ (car $(A^T A)^T = A^T A$) alors

Comme $A^T A$ est symetrique

(**) $\langle A^T A h, h\rangle \geq \lambda_{min} \|h\|^2$

où λ_{min} est la plus petite val. propre de $A^T A$

Comme $A^T A$ est positive (car $\langle A^T A h, h\rangle = \langle Ah, Ah\rangle = \|Ah\|^2 \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$)

alors on sait que $\lambda_{min} \geq 0$

Montrons $\lambda_{min} > 0$.

Pour ceci il suffit de montrer que $A^T A$ est SDP

Il suffit de montrer $\langle A^T A v, v\rangle = 0 \implies v = 0$

Mais $\langle A^T A v, v\rangle = 0 \implies \langle Av, Av\rangle = 0 \iff \|Av\|^2 = 0$

$\iff \|Av\| = 0 \iff Av = 0 \implies v = 0$ car A injective.

Donc de (*) et (**) on a

$$\langle \nabla^2 g(f(x))\, Ah, Ah \rangle \geq \alpha \, \lambda_{min} \|h\|^2$$

avec $\alpha, \lambda_{min} > 0$

Comme $\langle \nabla^2 g(f(x))\, Ah, Ah \rangle = \langle \nabla^2 \varphi(x) h, h \rangle$ (vu en a2) alors g est fortement convexe.

c) $\varphi_1 = g_1 \circ f_1$ avec

$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad g_1(y) = y^2 + \sin(y)$

$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\qquad f_1(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 = Ax$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}$; $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

f_1 est affine

g_1 est convexe (car $g_1''(y) = 2 - \sin(y) \geq 2 - 1 = 1$ $\cancel{1 > 0}$ $\forall y \in \mathbb{R}$)

Par a) alors φ_1 est convexe

g_1 est même fortement convexe car $g_1'' \geq 1$

mais A n'est pas injective (car $m = 1$, $n = 3$ $\Rightarrow$ $m < n$)

(exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A)$)

On ne peut pas déduire que φ_1 est fortement convexe.

$$\nabla^2 \varphi_1(x) = A^T \underbrace{g_1''(f(x))}_{\text{scalaire}} A = \underbrace{g_1''(f(x))}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{A^T A}_{\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$\langle \nabla^2 \varphi_1(x) h, h \rangle = \langle g_1''(f(x))\, A^T A h, h \rangle =$$

$$= g_1''(f(x)) \langle Ah, Ah \rangle = g_1''(f(x)) \|Ah\|^2$$

Prendre $h \in \ker(A)$, $h \neq 0$ (par exemple $h = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Alors $\langle \nabla^2 \varphi_1(x) h, h \rangle = 0$ (car $Ah = 0$) avec $h \neq 0$. Donc φ_1 n'est pas fortement convexe.

Exo 3.

a) Prendre $g : R \to R$
$g(y) = y \quad , \forall y \in R$

g est affine donc convexe

$f : R \to R$
$x \in R \to f(x) = x^2$

f convexe.

$(g \circ f)(x) = -x^2 \quad , \forall x \in R,$ fonction non convexe

b) Prendre $f : R \to R$
$x \in R \to f(x) = x^2$ $\quad f$ convexe

$g : R \to R$
$x \in R \to g(x) = -1$ $\quad g$ constante donc convexe.

Alors $(fg)(x) = f(x)\, g(x) = -x^2$ fonction non convexe.