Polytech Lyon, MAM3A 2020 - 2021

Optimisation Continue

Partiel - mai 2021

Durée 1h30

Partout dans cet énoncé $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

Exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x_1 + x_2)\, \|x\|^\alpha & \text{si} \quad x = (x_1, x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Trouver α tel que f soit une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que si $\alpha \geq 0$ alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer $\nabla f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2. (*composée entre une fonction convexe et une fonction affine*)
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice, $b \in \mathbb{R}^m$ un vecteur et la fonction affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donnée par

$$f(x) = Ax + b, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

On se donne aussi $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction **de classe** C^2 et **convexe** et on définit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ comme la composée entre g et f (donc $\varphi(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$).

a) Montrer la convexité de la fonction φ par deux méthodes:

a1) En utilisant la définition d'une fonction convexe
Indication: montrer d'abord que $f(tx+(1-t)y) = tf(x)+(1-t)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,1]$.
(*pour cette méthode l'hypothèse* g *de classe* C^2 *est inutile*)

a2) En utilisant la caractérisation de la convexité avec la matrice Hessienne pour une fonction de classe C^2
Rappel résultat vu en TD1: $\nabla^2\varphi(x) = A^T\, \nabla^2 g(f(x))\, A$.

b) Montrer que si en plus g est fortement convexe et A est une matrice injective (c'est à dire $Ker(A) = \{0\}$) alors φ est fortement convexe.

c) **Application:** Montrer la convexité de la fonction $\varphi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + \sin(x_1 + x_2 - 2x_3), \quad \forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Est-ce φ_1 une fonction fortement convexe?

Exercice 3.
Montrer par un contraexemple que

a) La composée des deux fonctions convexes n'est pas toujours une fonction convexe

b) Le produit des deux fonctions convexes n'est pas toujours une fonction convexe.

Indication: Se rappeler que les fonctions constantes ou les fonctions affines sont des fonctions convexes.