Corrigé Partiel 1 Optimisation 2021-2022

Exo 1.

a) On peut écrire

$f = \varphi \circ g$ avec $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \to \varphi(y) = y \sin y$

~~Mais $g/\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ s'écrit comme la composée entre la fonction $y \to \sqrt{y}$ définie sur $]0, \infty[$ et la fonction~~

Mais on peut écrire $g/\mathbb{R}^n\setminus\{0\} = \psi \circ h$

avec $h : \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad h(x) = \|x\|^2$

et $\psi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ $\quad \psi(z) = \sqrt{z}$.

Comme ψ et h sont C^∞ alors $g/\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ est C^∞

Comme φ est une fonction C^∞ alors f est C^∞ sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$

b) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^n$ (bien connu : la fonction norme est continue)

Comme φ est continue alors f est continue sur $\mathbb{R}^n$

c) $\nabla g(x) = \psi'(h(x)) \nabla h(x)$ $\quad \psi'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$

donc $\nabla g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\|x\|^2}} \cdot 2x$ donc

$\nabla g(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$

Montrons qu'il n'existe pas $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\partial g(x)}{\partial x_1}$

$\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x) = \dfrac{x_1}{\|x\|}$

Prendre $x^{(k)} = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x^{(k)}) = 1$

$y^{(k)} = \left(-\frac{1}{k}, 0\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(y^{(k)}) = -1$

Alors $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x)$ donc g n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$

d) $\forall\, i \in \{1, \dots n\}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\|x\| \sin(\|x\|) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\|x\|) \sin(\|x\|) + \|x\| \frac{\partial}{\partial x_i}(\|x\|) \cos(\|x\|)$$

$$= \frac{x_i}{\|x\|} \sin(\|x\|) + \|x\| \frac{x_i}{\|x\|} \cos(\|x\|)$$

Donc $\qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|} \sin(\|x\|) + x \cos(\|x\|)$$

e) $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq \underbrace{\frac{|x_i|}{\|x\|}}_{\leq 1} \sin(\|x\|) + |x_i| \cos(\|x\|)$

$\leq \sin(\|x\|) + \|x\| \cos(\|x\|)$

Comme $\sin(\|x\|) + \|x\| \cos(\|x\|) \longrightarrow 0$ si $\|x\| \to 0$

alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \longrightarrow 0$ si $\|x\| \to 0 \quad \forall\, i = 1 \dots n$

donc $\nabla f(x) \Longrightarrow 0 \Rightarrow f$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$

Par un résultat vu en cours

et $\nabla f(0) = 0$.

Exo 2.

a) On peut ecrire

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} \langle I_n x, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

f est une fonction quadratique donc $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

On a les calculs standard : donc

$$\nabla f(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot 2 I_n x + \frac{1}{2} 2Ax - b$$

$$\nabla f(x) = (\alpha I_n + A) x - b$$

Alors

$$\nabla^2 f(x) = \alpha I_n + A$$

b) On notera $B_\alpha = \alpha I_n + A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

B_α symetrique

Il est bien connu que si on note
μ_{min} = la plus petite valeur propre de $B\alpha$
λ_{min} = la plus petite valeur propre de A
alors on a

$\mu_{min} = \alpha + \lambda_{min}$

Alors on sait : $B\alpha$ est SDP $\Leftrightarrow \mu_{min} > 0 \Leftrightarrow$

$\alpha > -\lambda_{min}$

Donc on peut prendre $\alpha_0 = -\lambda_{min}$

Donc si $\alpha > -\lambda_{min}$ alors $B\alpha$ est SDP ~~donc~~ ce qui implique que f est fortement convexe.

Ceci donne l'existence et l'unicité d'un point de min de f sur $\mathbb{R}^n$.

c)

c1) ~~$B\alpha$~~ On cherche les valeurs propres de A

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+3)-4 = \lambda^2+3\lambda-4$$

$$\Delta = 9+16 = 25 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-3\pm5}{2} ; \quad \lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 1$$

$\lambda_{min} = -4$

Donc si $\alpha > 4$ on a l'existence et unicité d'un point de min de f sur $\mathbb{R}^2$

c2) Pour trouver x^* on resoud l'équat d'Euler $B\alpha x^* = b$ donc
$\nabla f(x^*) = 0$

On a :

$$\begin{cases} (-3+\alpha)x_1^* + 2x_2^* = -2 \\ 2x_1^* + \alpha x_2^* = 0 \end{cases}$$

La 2-ème equation nous donne $x_1^* = -\frac{\alpha}{2}x_2^*$; on remplace dans la première équation

$$\begin{cases} -\frac{\alpha}{2}(-3+\alpha)x_2^* + 2x_2^* = -2 \\ x_1^* = -\frac{\alpha}{2}x_2^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\alpha^2+3\alpha+4)x_2^* = -4 \\ x_1^* = -\frac{\alpha}{2}x_2^* \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x_2^* = \dfrac{4}{\alpha^2-3\alpha-4} \\ x_1^* = -\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-3\alpha-4} \end{cases}$$

Remarque : Comme $\alpha > 4$ alors $\alpha^2-3\alpha-4 > 0$

Exo 3.

a) ~~On considere la suite~~ On fixe $u \in \ker(A)$ tel que $\langle u, b\rangle \neq 0$

On considère la suite $x^{(k)} = k \cdot \text{signe}(\langle u, b\rangle)\, u \quad k \in \mathbb{N}$

On observe que $Ax^{(k)} = k\, \text{signe}(\langle u, b\rangle) \underbrace{Au}_{=0} = 0$

Alors

$$f(x^{(k)}) = 0 - k\, \text{signe}(\langle u, b\rangle) \langle b, u\rangle$$
$$= -k\, |\langle u, b\rangle| \longrightarrow -\infty \quad \text{si } k \to +\infty$$

Donc f n'admet pas de point de min sur $\mathbb{R}^n$

b) Nous avons

$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^T A x, x\rangle$ A^TA est une matrice SDP.

Comme $\ker(A) = \{0\}$ alors

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que

~~$\langle A^TAx, x\rangle$~~ $\geq \alpha$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\|Ax\|^2 \geq \alpha \|x\|^2$

Alors $\|Ax\|^3 = \left(\|Ax\|^2\right)^{3/2} \geq \alpha^{3/2} \left(\|x\|^2\right)^{3/2} = \alpha^{3/2} \|x\|^3$

Alors $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$f(x) \geq \alpha^{3/2} \|x\|^3 - \langle b, x\rangle$

(Cauchy - Schwarz)

Mais $|\langle b, x\rangle| \leq \|b\| \cdot \|x\|$

donc $-\langle b, x\rangle \geq -\|b\| \cdot \|x\|$.

Alors $f(x) \geq \alpha^{3/2} \|x\|^3 - \|b\| \cdot \|x\| \longrightarrow +\infty$ si $\|x\| \to +\infty$

Alors f est coercive sur $\mathbb{R}^n$
Comme f est continue sur $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n$ est fermée en $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ il existe au moins un point de min de f sur $\mathbb{R}^n$.