Polytech Lyon, MAM3A 2021 - 2022

Optimisation Continue

Partiel - mai 2022

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Partout dans cet énoncé $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

Exercice 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $g, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies respectivement par

$$x \in \mathbb{R}^n \ \mapsto \ g(x) = \|x\|$$

et

$$x \in \mathbb{R}^n \ \mapsto \ f(x) = \|x\| \sin(\|x\|).$$

a) Montrer que g et f sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^n$.
c) Calculer le gradient de g sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La fonction g est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$? Justification.
d) Calculer le gradient de f sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
e) Montrer que $\nabla f(x) \to 0$ si $x \to 0$. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Qui est $\nabla f(0)$?

Exercice 2.
On se donne $n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. On introduit la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2} < Ax\,,\, x > - < b\,,\, x >, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

a) Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et calculer ∇f et $\nabla^2 f$.
b) Montrer qu'il existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout α avec $\alpha > \alpha_0$ on a l'existence et l'unicité d'un point de minimum de f sur $\mathbb{R}^n$.
c) Nous considérons dans cette partie le cas particulier: $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
c1) Donner un $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\alpha > \alpha_0$ on a l'existence et l'unicité d'un point de minimum x^* de f sur $\mathbb{R}^2$.
c2) Avec α comme dans la partie **c1**) calculer x^* en fonction de α.

Exercice 3.
On se donne $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. On introduit la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \|Ax\|^3 - < b\,,\, x >, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

a) On suppose ici que $Ker(A) \neq \{0\}$ (donc A est non injective) et que $b \notin (Ker(A))^{\perp}$ (c'est à dire: b n'est pas dans le sous-espace orthogonal au sous-espace vectoriel $Ker(A)$; cela veut dire qu'il existe $u \in Ker(A)$ tel que $< b, u > \neq 0$).
Montrer que f n'admet pas de point de minimum sur $\mathbb{R}^n$.

b) On suppose ici que $Ker(A) = \{0\}$ (donc A est injective).
Montrer l'existence d'au moins un point de minimum de f sur $\mathbb{R}^n$.