Corrigé Partiel Optimisation 2022-2023

Exercice 1.

a) Sur U on peut écrire $f = g \cdot h$

$g(x) = 2x_1 - x_2$ $h(x) = \|x\|^\alpha$

$g \in C^\infty(U)$ évident $v(x) = \|x\|^2$

$h = u \circ v$ avec $v : U \to]0, \infty[$, $u(y) = y^{\alpha/2}$

$u :]0, \infty[\to \mathbb{R}$,

$u, v \in C^\infty$ alors $h \in C^\infty$

Comme $g, h \in C^\infty(U)$ alors $f \in C^\infty(\Omega)$.

$\nabla f(x) = \nabla g(x) h(x) + g(x) \nabla h(x)$ (vu en TD)

$\nabla h(x) = \alpha \|x\|^{\alpha-2} x$

$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Alors

$\nabla f(x) = \|x\|^\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha(2x_1 - x_2) \|x\|^{\alpha-2} x$, $\forall x \in U$

b) si $\alpha > -1$ on a ~~lim~~ $|f(x)| \leq |2x_1 - x_2| \|x\|^\alpha$ Mais $|x_1| \leq \|x\|$, $|x_2| \leq \|x\|$

$\leq \big(\underbrace{2|x_1| + |x_2|}_{\leq 3\|x\|}\big) \|x\|^\alpha$

Alors

$|f(x)| \leq 3 \|x\|^{\alpha+1}$, $\forall x \in U$

Comme $\alpha + 1 > 0$ alors $\|x\|^{\alpha+1} \to 0$ si $x \to 0$

Alors ~~donc~~ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^n$

Donc f est continue en 0.

si $\alpha \leq -1$

prendre ~~$x = (k, 0)$~~ $x^{(k)} = (\frac{1}{k}, 0)$, $k \in \mathbb{N}^*$

$\|x^{(k)}\| = \frac{1}{k}$

~~$f(x^{(k)}) = 2k$~~

Alors $f(x^{(k)}) = \frac{2}{k} \left(\frac{1}{k}\right)^\alpha = \cancel{2k^{\alpha+1}}\ \frac{2}{k^{\alpha+1}} = 2k^{-(\alpha+1)}$

Comme $\alpha + 1 \leq 0$ alors $-(\alpha+1) \geq 0$

$f(x^{(k)}) \not\to 0$ si $k \to \infty$

donc ~~lim~~ on n'a pas $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

f non continue en 0

c) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 2\|x\|^\alpha + \alpha(2x_1 - x_2)\|x\|^{\alpha-2} x_1$

$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right| \leq 2\|x\|^\alpha + \alpha\underbrace{\left(2|x_1| + |x_2|\right)}_{\leq 3\|x\|}\|x\|^{\alpha-2}\underbrace{|x_1|}_{\leq \|x\|}$

$\leq 2\|x\|^\alpha + 3\alpha\|x\|^\alpha \quad = (2+3\alpha)\|x\|^\alpha$

Comme $\alpha > 0$ alors $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \longrightarrow 0$ pour $x \to 0$

C'est pareil pour $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = -\|x\|^\alpha + \alpha(2x_1 - x_2)\|x\|^\alpha x_2$

$\nabla f(0) = 0$.

Alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\nabla f(0) = 0$.

d) Prendre $x^{(k)} = (\cancel{\tfrac{1}{k}, 0})\ (0, \frac{1}{k})$

$\|x^{(k)}\| = \frac{1}{k}$.

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(k)}) = 2\left(\frac{1}{k}\right)^\alpha = 2k^{-\alpha}$

Comme $-\alpha > 0$ alors

si $k \to \infty$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(k)}) \longrightarrow +\infty$

Alors f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.

~~a) Facile; f est le rapport de 2 fonctions de classe C^∞ sur U et $\|x\|^2 \neq 0$ $\forall x \in U$.~~

~~b) $f(x) = g(x)\, h(x)$ avec~~

~~$g(x) = \langle Ax, x\rangle$~~

~~$h(x)$~~

a) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ c'est evident

On écrit $\|x\|^2 = \langle I_n x, x\rangle$

En appliquant des formule du cours on a

$\nabla f(x) = \cancel{x + \alpha A x}\ \frac{1}{2} 2x + \frac{\alpha}{2} 2Ax$ donc

$\nabla f(x) = x + \alpha A x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

~~A~~ Alors

$\nabla^2 f(x) = I_n + \alpha A$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\nabla^2 f(x)$ est independante de x

b) A et $\nabla^2 f(x)$ sont des matrices symetriques alors leurs valeurs propres sont reelles.

En utilisant le resultat rappelé

~~si~~ μ val. propre de $\nabla^2 f(x)$ si et seulement si $\mu = 1 + \alpha\lambda$ avec λ valeur propre de A

c) On suppose

$|\alpha| \max_{\tilde\lambda \in VP(A)} |\tilde\lambda| < 1$

Comme $|\lambda| \leq \max_{\tilde\lambda \in VP(A)} |\tilde\lambda|$ $\quad \forall \lambda \in VP(A)$

alors $\quad \forall \lambda \in VP(A)$

$|\alpha| . |\lambda| < 1$ $\quad |\alpha\lambda| \geq -\alpha\lambda$ donc

D'autre part, on a :

$-\alpha\lambda < 1$

~~ceci~~ ce qui donne $\quad \forall \lambda \in VP(A)$ $\quad$ ce qui donne le resulta

$1 + \alpha\lambda > 0$

d) Si $|\alpha| < \frac{1}{\rho(A)}$ alors

$|\alpha| \rho(A) < 1$ donc tous les val. propres de A sont strictement positive

Cela nous donne A fortement convexe (vu en TD)

c) $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{\alpha}{2}\langle Ax, x\rangle$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Il faut alors calculer $\rho(A)$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (-4-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = 4 + 5\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda+5)$

les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -5$

Cela nous donne

$\rho(A) = 5$.

Il suffit de prendre un $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $|\alpha| < \frac{1}{5}$

par exemple $\alpha = +\frac{1}{6}$

Exercice 3.

a) f est le quotient de 2 fonctions de classe C^1 avec $\|x\|^2 > 0$ $\forall x \in U$.

Alors f est de classe C^∞ sur U.

b) $f(x) = g(x)\, h(x)$ avec

$g(x) = \langle Ax, x\rangle$; $h(x) = \|x\|^{-2}$

Alors $\nabla f(x) = g(x)\nabla h(x) + h(x)\nabla g(x)$ (vu en TD)

$\nabla g(x) = 2Ax$; $\nabla h(x) = -2\|x\|^{-4} x$

Alors

$$\nabla f(x) = \frac{2Ax}{\|x\|^2} - \frac{2\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^4} x$$

$$= \frac{2}{\|x\|^2}\left(Ax - \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} x\right)$$ donc

$$\nabla f(x) = \frac{2}{\|x\|^2}\left(Ax - f(x)\, x\right)$$

Si $x^* \in V$ alors x^* satisfait l'equation d'Euler $\nabla f(x^*) = 0$ donc (en simplifiant par $\frac{2}{\|x^*\|^2}$

$$A x^* = f(x^*)\, x^* = f^* x^*$$

Comme $x^* \neq 0$ alors x^* est vecteur propre de A avec ~~associé~~ à ~~la valeur~~ valeur propre associée f^*

c) Donc f^* est l'une des valeurs propre de A

Notons $\lambda_{min} = \min\{x \in VP(A)\}$

Montrons que $\boxed{f^* = \lambda_{min}}$ par ~~l~~ double inégalité.

~~On va montrer que~~

• "$\geq$" Montrons $\lambda_{min} \leq f^*$

C'est evident car f^* est l'une des valeurs propres de A $(f^* \in VP(A))$

• "$\leq$" Montrons $f^* \leq \lambda_{min}$

Supposons par absurd $f^* > \lambda_{min}$

Soit $y \in U$ un vecteur propre de A associée à la valeur propre λ_{min}. Alors

$A y = \lambda_{min} y$

~~ce~~ qui donne

$$f(y) = \frac{\langle Ay, y\rangle}{\|y\|^2} = \frac{\langle \lambda_{min} y, y\rangle}{\|y\|^2} = \lambda_{min} \frac{\|y\|^2}{\|y\|^2} = \lambda_{min}$$

Donc

$f^* > \lambda_{min} = f(y)$

ce qui ~~est une~~ contredit le fait que f^* est le "min" de f sur U.

~~Conclusion~~

~~$f^* = \lambda_{min}$~~

~~$V =$ l'ensemble des vecteurs~~ propres