Corrigé Partiel - Optimisation Continue 2023-2024

Exercice 1

a) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ evident

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 4 \\ 3x_2^2 + 2x_2 - 2x_1 - 8 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla^2 f(x) = J\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6x_2+2 \end{pmatrix}$$

b) Il faut resoudre $\nabla f(x) = 0$ donc

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 4 = 0 \\ 3x_2^2 + 2x_2 - 2x_1 - 8 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ 3x_2^2 + 2x_2 - 2(x_2+2) - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ 3x_2^2 - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_2 = \pm 2 \end{cases}$$

On a deux points critiques : $x^\circ = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ou $x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
les points eventuels de min local se trouve parmi ces 2 points

c) On pose $A = \nabla^2 f(0,-2)$ donc

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

On a $\det(A) = 2\cdot(-10) - 4 = -24$ et on sait $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$ ou $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres de A.

donc $\lambda_1 \lambda_2 = -24 < 0$ donc ~~A n'est pas pos~~.

Alors $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$ donc
A n'est pas une matrice positive
donc $x^\circ = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ n'est pas un point de min local

On pose $B = \nabla^2 f(4,2)$ donc

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

On applique le critère de Sylvester : $B_1 = (2)$; $B_2 = B$

$\det(B_1) = 2 > 0$

$\det(B_2) = \det(B) = 2\cdot 14 - 4 = 24 > 0$

Alors B est une matrice symétrique et définie positive matrice (SDP)

donc $x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un point de minimi local de f.
Il est donc le seul point de min local de f sur $\mathbb{R}^2$.

d) Considerons la suite

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad , n \in \mathbb{N}^*$$

$$f(x^{(n)}) = (-n)^3 + (-n)^2 - 8(-n) = -n^3 + n^2 + 8n$$

Nous avons $f(x^{(n)}) \longrightarrow -\infty$ si $n \to +\infty$

(car $f(x^{(n)}) = n^3 \underbrace{\left(-1 + \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\tfrac{8}{n^2}}_{\to 0}\right)}_{\to -1} \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty$

Donc il n'existe pas de point de minimi global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.

a) La partie $x \to \|Bx\|^2$ est la composée entre la fonction (notée g) $y \in \mathbb{R}^p \to \|y\|^2$ qui est C^∞ et la fonction (notée φ) $x \in \mathbb{R}^n \to Bx \in \mathbb{R}^p$ qui est C^∞, donc c'est C^∞.
La partie $x \to \|Ax\|^4$ (notée h) est la composée entre la fonction $y \in \mathbb{R}^m \to \|y\|^4$ qui est C^∞ et la fonction (notée ψ) $x \in \mathbb{R}^n \to Ax \in \mathbb{R}^m$ qui est C^∞, donc c'est C^∞.
(la fonction $y \in \mathbb{R}^m \to \|y\|^4$ est C^∞ car elle s'écrit

$$\|y\|^4 = (\|y\|^2)^2 = \left(\sum_{k=1}^m y_k^2\right)^2 .)$$

~~On note $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$~~ ~~donc~~ Alors

b) ~~$\nabla f(x) = 4\|Ax\|^2$~~

$$f(x) = (h \circ \psi)(x) + (g \circ \varphi)(x) - \langle d, x \rangle$$

$$\nabla f(x) = \nabla\psi(x) \nabla h(\psi(x)) + \nabla\varphi(x) \nabla g(\varphi(x)) - d$$

Mais $\nabla\psi(x) = A^T$; $\nabla h(y) = 4\|y\|^2 y$

$\nabla\varphi(x) = B^T$; $\nabla g(y) = 2y$

Alors $\nabla f(x) = A^T 4\|Ax\|^2 Ax + B^T 2Bx - d$

donc

$$\nabla f(x) = 4\|Ax\|^2 A^T A x + 2B^T B x - d, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$\nabla^2 f(x) = J\nabla f^{(x)}$

~~Nous avons~~ On pose $u(x) = 4\|Ax\|^2 \in \mathbb{R}$
$v(x) = A^T A x \in \mathbb{R}^n$

$J uv(x) = u\, Jv(x) + v\, Ju(x)$

$= 4\|Ax\|^2 A^T A + A^T A x \cdot 4 \cdot 2 \cancel{A} (Ax)^T A$

Alors

$\nabla^2 f(x) = 4\|Ax\|^2 A^T A + 8\, A^T A x\, (A^T A x)^T + 2B^T B$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

b) Pour tout ~~$h \in \mathbb{R}^n$~~ $x, h \in \mathbb{R}^n$ on a

$\langle \nabla^2 f(x) h, h\rangle = 4\|Ax\|^2 \langle A^T A h, h\rangle + 8\langle A^T A x (A^T A x)^T h, h\rangle$
$+ 2\langle B^T B h, h\rangle$

$= 4\|Ax\|^2 \langle Ah, Ah\rangle + 8\langle (A^T A x)^T h, (A^T A x)^T h\rangle + 2\langle Bh, Bh\rangle$

$= 4\|Ax\|^2 \|Ah\|^2 + 8\|(A^T A x)^T h\|^2 + 2\|Bh\|^2 \geqslant 0$

$\forall x, h \in \mathbb{R}^n$

Donc f est une fonction convexe.

c) Nous avons

$\langle \nabla^2 f(x) h, h\rangle = 4\|Ax\|^2 \|Ah\|^2 + 8\|(A^T A x)^T h\|^2 +$
$+ 2\langle B^T B h, h\rangle$

Nous savons que la matrice $B^T B$ est SDP (car B injective). On note $\lambda_{min} = \min(VP(B^T B)) > 0$

Alors

$\langle \nabla^2 f(x) h, h\rangle \geqslant 2\lambda_{min} \|h\|^2$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Alors f est fortement convexe

Par un résultat du cours on a $\exists$ et ! d'un point de min de f sur $\mathbb{R}^n$

(car $\mathbb{R}^n$ est fermé et convexe)

d) B est inversible, donc $\ker(B)=\{0\}$. et de c) on a
$\exists$ et ! d'un point de minim x^* de f sur $\mathbb{R}^2$.
Comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert x^* satisfait l'équation d'Euler
$\nabla f(x^*)=0$. (on notera $x=x^*$) donc

(1)' $4\|Ax\|^2 A^T A x + 2B^T B x - d = 0$

$B^T B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Ax = x_2$ donc $|Ax|^2 = x_2^2$

L'équation (1)' devient

$4x_2^2 \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8x_1 \\ 18x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 22 \end{pmatrix} = 0$ donc

$\begin{cases} 8x_1 - 6 = 0 \\ 4x_2^3 + 18x_2 - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3/4 \\ 4(x_2^3-1) + 18(x_2-1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3/4 \\ \underbrace{4(x_2-1)(x_2^2+x_2+1) + 18(x_2-1)}_{= (x_2-1)\underbrace{(4x_2^2+4x_2+22)}_{>0,\ \forall x_2\in\mathbb{R}}} = 0 \end{cases}$

On a alors $x^* = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

a) Nous avons : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, a = a(\varepsilon) \in S$ tel que
$\underbrace{\inf_{z\in S}\|x-z\|}_{=f(x)} \geq \|x-a\| - \varepsilon$. Prendre $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et on note $a_n = a(\varepsilon)$

On considère $x, y \in \mathbb{R}^p$, $t \in [0,1)$ arbitraires et
on veut montrer
$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + t f(y)$

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire et on considère $a_n \in S$ et $b_n \in S$ tels que

(2)' $\begin{cases} f(x) \geq \|x - a_n\| - \frac{1}{n} \\ f(y) \geq \|y - b_n\| - \frac{1}{n} \end{cases}$

~~positive~~

On a alors

$f((1-t)x+ty) = \inf_{z\in S} \|(1-t)x+ty-z\| \leq$

$\leq \|(1-t)x+ty-[(1-t)a_n+tb_n]\|$

(car $(1-t)a_n+tb_n \in S$ par convexité de S)

$= \|(1-t)(x-a_n)+t(y-b_n)\| \leq$ (inégalité triangulaire)

$|1-t|\,\|x-a_n\| + |t|\,\|y-b_n\| = (1-t)\|x-a_n\| + t\|y-b_n\|$

Par (2)' on a alors

$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)\left[f(x)+\frac{1}{n}\right] + t\left[f(y)+\frac{1}{n}\right]$

$= (1-t)f(x) + tf(y) + \frac{1}{n}(\underbrace{1-t+t}_{=1})$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^{\circ}$

$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)+\frac{1}{n}$

On passe à la limite $n \to \infty$

et on obtient l'inégalité souhaitée donc

la convexité de f

b) On pose $g : [0,\infty[\to [0,\infty[$ convexe et croissante

$z \to g(z) = z^2$

Alors $f^2(x) = g(f(x))$ $\forall x\in\mathbb{R}^p$. (car $f(x)\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}^p$, $f:\mathbb{R}^p\to[0,\infty[$.)

Alors pour ~~tous~~ $x,y\in\mathbb{R}^p$, $t\in[0,1]$ arbitraires on a

$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$ (vue en a)

Comme g est croissante ~~sur~~ sur $[0,\infty[$ on a

(3)' $g(f((1-t)x+ty)) \leq g((1-t)f(x)+tf(y))$

Comme g est convexe alors

(4)' $g((1-t)f(x)+tf(y)) \leq (1-t)\,g(f(x)) + t\,g(f(y))$

De (3)' et (4)' $\Rightarrow (g\circ f)((1-t)x+ty) \leq (1-t)(g\circ f)(x) + t(g\circ f)(y)$

~~donc~~ d'où la convexité de $g\circ f$.