Polytech Lyon, MAM3A 2023 - 2024

Partiel - Optimisation Continue

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Partout dans cet énoncé $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = x_2^3 + x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 8x_2, \quad \forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et calculer ∇f et $\nabla^2 f$.

b) Trouver les points critiques de f (c'est à dire les points $x^* \in \mathbb{R}^2$ tels que $\nabla f(x^*) = 0$).

c) Trouver les points de minimum local de f sur $\mathbb{R}^2$.

d) Montrer qu'il n'existe pas de point de minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.

On se donne $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, les matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et le vecteur $d \in \mathbb{R}^n$. On introduit la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \|Ax\|^4 + \|Bx\|^2 - \langle d, x\rangle, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

a) Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et calculer ∇f et $\nabla^2 f$.

b) Montrer que f est une fonction convexe.

c) On suppose ici que B est une matrice injective (c'est à dire $Ker(B) = \{0\}$). Montrer que f est une fonction fortement convexe. En déduire l'existence et l'unicité d'un point de minimum de f sur $\mathbb{R}^n$.

d) On suppose ici $m = 1,\ n = p = 2,\ A = (0\ \ 1),\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $d = \begin{pmatrix} 6 \\ 22 \end{pmatrix}$. Montrer l'existence et l'unicité d'un point de minimum x^* de f sur $\mathbb{R}^2$.
Calculer x^*.

Exercice 3.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $S \subset \mathbb{R}^p$ un ensemble convexe et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \inf_{z \in S} \|x - z\|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p \tag{2}$$

($f(x)$ est la "distance" de x à S).

a) Montrer que f est une fonction convexe.

Indication: Montrer et utiliser le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $a_n \in S$ tel que $f(x) \geq \|x - a_n\| - \frac{1}{n}$.

b) Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^p \ \mapsto\ f^2(x)$ est une fonction convexe.

Indication: utiliser la composition et le fait que la fonction $y \mapsto y^2$ est convexe et croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.