

Corrigé

$$a) f(z) = v_{\max} \left(z - \frac{z^3}{f_{\max}^2} \right) \quad , \quad f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

et

$$f'(z) = v_{\max} \left(1 - \frac{3z^2}{f_{\max}^2} \right)$$

$$f''(z) = -6 \frac{v_{\max}}{f_{\max}^2} z$$

et on a $f''(z) < 0 \quad \forall z > 0$

b) Cas 1 le cas le plus simple c'est $u_g = u_d$
 Alors la solution u est constante $= u_g$, solution classique

Cas 2.

$$u_g < u_d.$$

, donc $0 < u_g < u_d$.

Comme f' est strictement décroissante sur $[u_g, u_d]$ alors

$$f'(u_g) > f'(u_d)$$

Alors la solution entropique est un choc entropique

$$(1)' \quad u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma t \\ u_d & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$$

$$\text{avec } \sigma = f(u_g, u_d) = \frac{f(u_g) - f(u_d)}{u_g - u_d}$$

σ = la vitesse du choc.

Comme $\sigma = f'(r)$ avec $u_g < r < u_d$ alors nous avons clairement

$$f'(u_g) > f'(r) > f'(u_d)$$

$$\text{avec } \xi(t) = \sigma t \quad \forall t \geq 0$$

On fait un calcul plus précis de σ :

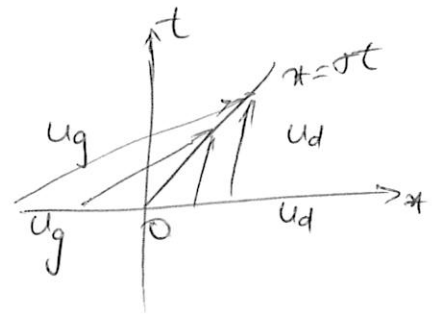
$$\sigma = \frac{f(u_g) - f(u_d)}{u_g - u_d} = v_{\max} \left(\frac{u_g - u_d}{u_g - u_d} - \frac{\frac{u_g^3 - u_d^3}{u_g - u_d}}{f_{\max}^2} \right)$$

On a la formule

$$\frac{u_g^3 - u_d^3}{u_g - u_d} = u_g^2 + u_g u_d + u_d^2$$

Alors

$$(2)' \quad \sigma = v_{\max} \left(1 - \frac{u_g^2 + u_g u_d + u_d^2}{p_{\max}^2} \right)$$



Car 3.

$$u_g > u_d.$$

donc $0 < u_d < u_g$

Comme f' est strictement décroissante sur (u_d, u_g) alors

$$f'(u_g) < f'(u_d)$$

Alors la solution entropique est une onde de détente

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma_1 t \\ v\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } \sigma_1 t < x < \sigma_2 t \\ u_d & \text{si } x > \sigma_2 t \end{cases}$$

avec

$$\sigma_1 = f'(u_g) = v_{\max} \left(1 - \frac{3u_g^2}{p_{\max}^2} \right)$$

on a $\sigma_1 < \sigma_2$

$$\sigma_2 = f'(u_d) = v_{\max} \left(1 - \frac{3u_d^2}{p_{\max}^2} \right)$$

v est la réciproque de f'
 f' est une bijection de $[u_d, u_g]$ dans $[f'(u_g), f'(u_d)]$
 $= [\sigma_1, \sigma_2]$

v est définie sur $[\sigma_1, \sigma_2]$ à valeurs dans $[u_d, u_g]$

Calculons v :

Pour tout $y \in [\sigma_1, \sigma_2]$ il faut trouver $z \in [u_d, u_g]$

tel que

$$f'(z) = y \quad \text{donc}$$

$$v_{\max} \left(1 - \frac{3z^2}{p_{\max}^2} \right) = y \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{3z^2}{p_{\max}^2} = \frac{y}{v_{\max}} \quad (=)$$

(3)' ~~(2)~~

~~(2)~~

$$\frac{3}{p_{\max}^2} z^2 = 1 - \frac{y}{v_{\max}}$$

$$\text{Mais } f'(x) = v_{\max} \left(1 - \frac{3x^2}{\rho_{\max}^2}\right) \leq v_{\max}$$

$$y < \sigma_2 = f'(u_d) < v_{\max} \Rightarrow \frac{y}{v_{\max}} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{y}{v_{\max}} > 0$$

Alors on peut résoudre (2)' :

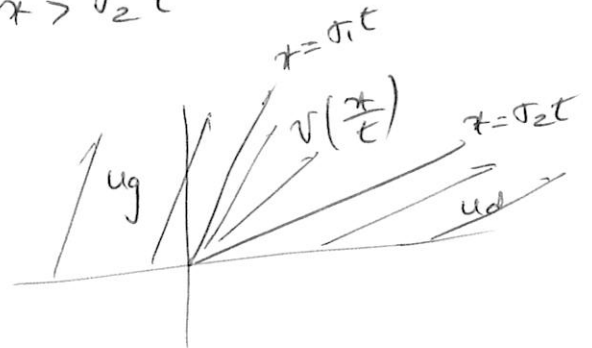
$$x = \pm \frac{\rho_{\max}}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{y}{v_{\max}}} = \pm \frac{\rho_{\max}}{\sqrt{3} v_{\max}} \sqrt{v_{\max} - y}$$

Comme $(u_d, u_g) \in]0, +\infty[$ on choisit "+"

$$\text{Alors } v(y) = \frac{\rho_{\max}}{\sqrt{3} v_{\max}} \sqrt{v_{\max} - y} \quad \forall y \in [\sigma_1, \sigma_2]$$

Alors la solution dans ce cas est onde de détente est

$$(2)' \quad u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma_1 t \\ \frac{\rho_{\max}}{\sqrt{3} v_{\max}} \sqrt{v_{\max} - \frac{x}{t}} & \text{si } \sigma_1 t < x < \sigma_2 t \\ u_d & \text{si } x > \sigma_2 t \end{cases}$$



b2) On a ici la solution (1)' qui est un

choc entropique.

Pour que le bouchon diminue on doit avoir

$$\sigma > 0$$

avec σ donné par (2)'

ce qui donne

$$1 - \frac{u_g^2 + u_g u_d + u_d^2}{\rho_{\max}^2} > 0$$

c'est à dire

$$u_g^2 + u_g u_d + u_d^2 < p_{\max}^2$$

c) Si on regarde le pb. de Riemann centré en $x=0$
la solution sera ~~un~~ un choc entropique
(car $1 < 3$)

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \delta_1 t \\ 3 & \text{si } x > \delta_1 t \end{cases}$$

avec $\delta_1 = f(1, 3)$.

Si on utilise (2)' on a

$$\delta_1 = 5 \left(1 - \frac{1+3+9}{100} \right) = \frac{87}{20}$$

Si on regarde le pb. de Riemann centré en $x=2$
la solution sera encore un choc entropique
(car $3 < 5$)

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 + \delta_2 t \\ 5 & \text{si } x > 2 + \delta_2 t \end{cases}$$

avec $\delta_2 = f(3, 5)$.

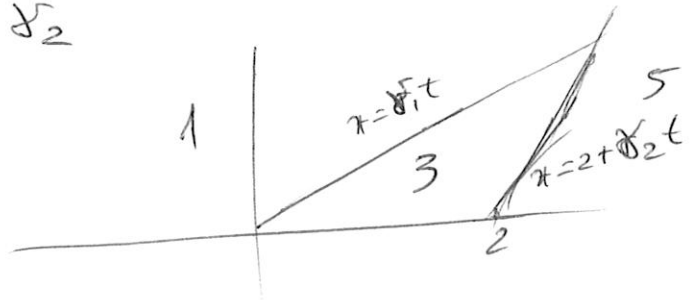
On utilise encore (2)' et on a

$$\delta_2 = 5 \left(1 - \frac{9+15+25}{100} \right) = \frac{51}{20}$$

On observe $\delta_1 > \delta_2$

Nous avons donc
comme solution pour
 $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, t_1]$:

$$(5)' \quad u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \delta_1 t \\ 3 & \text{si } \delta_1 t < x < 2 + \delta_2 t \\ 5 & \text{si } x > 2 + \delta_2 t \end{cases}$$

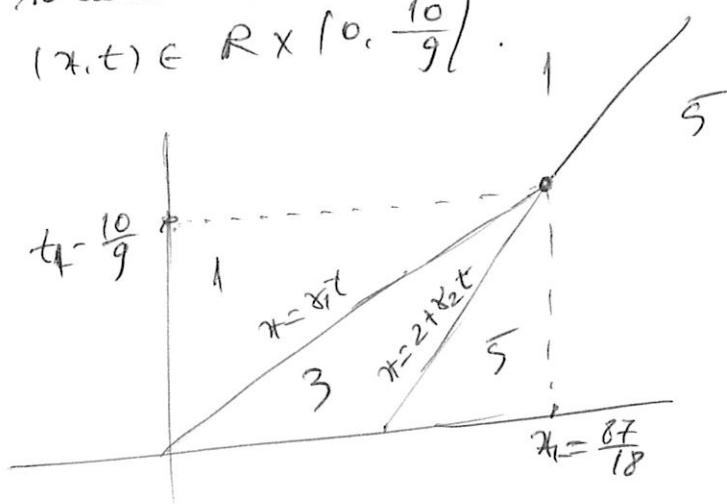


5

Cette solution est valable tant que
 $x_1 t < 2 + x_2 t \quad (\Rightarrow) \quad (x_1 - x_2)t < 2 \quad (\Rightarrow)$
 $\left(\frac{87}{20} - \frac{51}{20}\right)t < 2 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{36}{20}t < 2 \quad (\Rightarrow) \quad t < \frac{10}{9}$
 donc $t_1 = \frac{10}{9}$

Donc la solution (5)' est valable pour
 $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \frac{10}{9}]$.

c2)



le point $(x_1, t_1) \in \mathbb{P}$ avec $x_1 = x_1 t_1 = \frac{87}{20} \cdot \frac{10}{9} = \frac{87}{18}$
 est le point où les 2 choc $\{x = x_1 t\}$ et $\{x = 2 + x_2 t\}$
 se rencontrent. On observe que la demi-droite
 $\{x = x_1 + x_3 t, t \geq \frac{10}{9}\}$ peut être un
 choc entropique pour les valeurs $\begin{cases} 1 & \text{à gauche} \\ 5 & \text{à droite} \end{cases}$ pour $t > \frac{10}{9}$

avec $x_3 \in \mathbb{R}$ à déterminer à partir de (RH):

Alors $x_3 = f(1, 5) \in$ et on utilise (2)' pour
 $u_g = 1; u_d = 5$

Alors $x_3 = 5 \left(1 - \frac{1+5+25}{100}\right) = \frac{69}{20}$: on a bien $f'(1) > f'(5)$

Alors la solution sera

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x < x_1 t \text{ et } t \in [0, \frac{10}{9}]) \text{ ou } (x < x_1 + x_3 t \text{ et } t > \frac{10}{9}) \\ 3 & \text{si } (x_1 t < x < 2 + x_2 t \text{ et } 0 \leq t \leq \frac{10}{9}) \\ 5 & \text{si } (x > 2 + x_2 t \text{ et } t \in [0, \frac{10}{9}]) \text{ ou } (x > x_1 + x_3 t \text{ et } t > \frac{10}{9}) \end{cases}$$