Polytech Lyon, MAM4A, 2024 - 2025

Problèmes Hyperboliques (PH)

Partiel 1

Durée 1h30 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Problème

On considère ici un modèle de trafic routier un peu différent de celui vu en cours. Nous supposons que la vitesse des voitures est une fonction de la densité, de la forme $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$V(z) = v_{max}\left(1 - \frac{z^2}{\rho_{max}^2}\right), \quad \forall\, z \in \mathbb{R} \tag{1}$$

avec $\rho_{max} > 0$ donnée (densité maximale) et $v_{max} > 0$ donnée (vitesse maximale).
On introduit aussi la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(z) = zV(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{R}$ (c'est la fonction flux) avec V donnée par (1). On se donne aussi une autre fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ (c'est la donnée initiale).

On considère le problème suivant: trouver $u(x,t) \in \mathbb{R}$ (densité des voitures) satisfaisant la loi de conservation scalaire:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 & \text{pour} \quad (x,\ t) \in \mathbb{R} \times [0,\ +\infty[\\ \\ u(x,\,0) = g(x) & \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

a) Montrer qu'on a

$$f''(z) < 0, \quad \forall\, z \in]0,\ +\infty[.$$

b) On suppose ici

$$g(x) = \begin{cases} u_g & \text{si} \quad x < 0 \\ u_d & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

avec $u_g, u_d \in]0, \rho_{max}[$, ce qui correspond à un problème de Riemann.

b1) Donner la solution entropique de (2) en considérant tous les cas possibles.
Indication: remarquer que la solution sera toujours strictement positive et utiliser **a)**.

b2) On suppose ici que $u_g < u_d$; supposons aussi que u_g est assez petite, ce qui correspond à un trafic peu dense pour $x < 0$ et que u_d est assez grande, proche de ρ_{max}, ce qui correspond à un trafic dense, proche de l'embouteillage pour $x > 0$. Quelle condition doit satisfaire u_g et u_d pour que le bouchon diminue, donc pour que le trafic devient de moins en moins dense globalement?

c) On suppose ici $v_{max} = 5$ et $\rho_{max} = 10$ (les unités de mesure ne sont pas nécessairement *"kilomètres à l'heure"* pour la vitesse et *"nombre des voitures par kilomètre"* pour la densité). On suppose qu'on a une densité initiale donnée par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 5 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases} \tag{3}$$

c1) Trouver une valeur $t_1 > 0$ telle que pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, t_1[$ la solution entropique de (2) soit donnée par

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < \sigma_1 t \\ 3 & \text{si} \quad \sigma_1 t < x < 2 + \sigma_2 t \\ 5 & \text{si} \quad x > 2 + \sigma_2 t \end{cases} \tag{4}$$

avec $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ à trouver (il s'agit de la juxtaposition de 2 chocs entropiques). Ilustrer graphiquement les 2 chocs.

c2) Trouver la solution entropique pour tous $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.