Corrigé Exam Contrôle Optimal ~~2017~~ MAM 5A
2017-2018

Partie I.

Ia)
(1) $x_1' = r x_1 + d x_2 + s u$

(2) $x_2' = -u$

(3) $x_1(0) = a$

(4) $x_2(0) = b$

Remarquons que (1)-(2) s'écrivent (avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$)

$x' = Ax + Bu$ avec

$A = \begin{pmatrix} r & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} s \\ -1 \end{pmatrix}$

le problème de contrôle s'écrit

$\int_0^T L(t, x(t), u(t))\,dt + \varphi(x(T))$ ~~dans cette~~

avec $L(t, \tilde{x}, \tilde{u}) = \frac{\varepsilon}{2} \tilde{u}^2$.

(dans cette partie $L = 0$)

$\forall z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\varphi(z) = -z_1 - s z_2$

le problème adjoint s'écrit (avec $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$)

$$\begin{cases} p' = -A^T p & (\text{car } \nabla_x L = 0) \\ p(T) = \begin{pmatrix} -1 \\ -s \end{pmatrix} & \left(\text{car } \nabla \varphi(z) = \begin{pmatrix} -1 \\ -s \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Comme $A^T = \begin{pmatrix} r & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ cela donne :

(5) $p_1' = -r p_1$

(6) $p_2' = -d p_1$

(7) $p_1(T) = -1$

(8) $p_2(T) = -s$

D'autre part on a $\nabla_u L = \varepsilon \tilde{u}$

donc dans cette partie

$\nabla_u L = 0$; On a aussi $B^T p = s p_1 - p_2$

La dernière relation du ~~principe~~ système d'optimalité s'écrit alors :

~~$p_2 - s p_1 \in N_{[-M, M]}(u)$~~

(9) $P_2(t) - sP_1(t) \in N_{[-M,M]}(u(t))$ p.p. $\forall t \in]0,T[$.

II a). On doit donc résoudre (1)-(9).

Remarque.
De (5)-(6)+(7)-(8) on peut trouver $P_1(t), P_2(t)$

D'abord (5) et (7) donnent

(10) $P_1(t) = -e^{-r(t-T)} = -e^{r(T-t)}$

Ensuite de (6) on ~~trouve~~ a ce qui donne

$P_2'(t) = d e^{-r(t-T)}$

$P_2(t) = -\frac{d}{r} e^{-r(t-T)} + \cancel{\text{Const}}\, C$ avec C constante

En utilisant (8) on trouve

$-s = -\frac{d}{r} + c$ donc $c = \frac{d}{r} - s$

On a finalement

(11) $P_2(t) = -s + \frac{d}{r}\left(1 - e^{r(T-t)}\right)$

De (9) on trouvera $u(t)$ en regardant le signe de $P_2(t) - sP_1(t)$

(on notera $E(t) = P_2(t) - sP_1(t)$)

De (10) et (11) on a

$E(t) = -s + \frac{d}{r} - \frac{d}{r} e^{r(T-t)} + s e^{r(T-t)}$ donc

$E(t) = \left(s - \frac{d}{r}\right)\left(e^{r(T-t)} - 1\right)$

~~Cas i)~~ On observe que $e^{r(T-t)} - 1 > 0$, $\forall t \in [0,T[$

Cas i) $s > \frac{d}{r}$ $\forall t \in [0,T]$ et (9)

Alors $E(t) > 0$ $\forall t \in [0,T)$

Dans ce cas

nous donne $u^*(t) = M$

Cas ii) $s < \frac{d}{r}$ $\forall t \in [0,T]$ et (9) nous donne

Alors $E(t) < 0$ $\forall t \in [0,T]$

$u^*(t) = -M$

Partie II.

II a) Ici (1)−(4) ne changent pas (par rapport à la Partie I)

$L(t, \tilde{x}, \tilde{u}) = \frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}^2$

donc $\nabla_x L = 0$; $\nabla_u L = \varepsilon \tilde{u}$

La fonction φ ne change pas

(5)−(6)−(7)−(8) ne changent pas

Au lieu de (9) on aura

(9)' $p_2(t) - s p_1(t) - \varepsilon\, u(t) \in \underbrace{N_{\mathbb{R}}(u(t))}_{=\{0\}}$

donc

$p_2 - s p_2 - \varepsilon u = 0$

IIb) Ceci donne

$u = \frac{1}{\varepsilon}(p_2 - s p_1)$

Avec (10) et (11) qui ne changent pas

on obtient le contrôle optimal dans ce cas :

$u^*(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(s - \frac{d}{r}\right)\left(e^{r(T-t)} - 1\right) \quad \forall t \in [0, T]$

Partie III.

III a) $\underline{H}(t, \tilde{x}, \tilde{p}, \hat{u}) = L(t, \tilde{x}, \tilde{u}) + f^T(t, \tilde{x}, \tilde{u}) \cdot \tilde{p}$

avec

$L(t, \tilde{x}, \tilde{u}) = \frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}^2$

$f^T(t, \tilde{x}, \tilde{u})\tilde{p} = (Ax + Bu)^T \tilde{p} = \langle A\tilde{x} + B\tilde{u} | \tilde{p} \rangle$

$= (r\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_2 + s\tilde{u})\tilde{p}_1 - \tilde{u}\tilde{p}_2$

Alors

$\underline{H}(t, \tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{u}) = \frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}^2 + (r\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_2 + s\tilde{u})\tilde{p}_1 - \tilde{u}\tilde{p}_2$

donc

$\underline{H}(t, \tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{u}) = \frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}^2 + \tilde{u}(s\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) + \tilde{p}_1(r\tilde{x}_1 + d\tilde{x}_2)$

C'est un polynome degrée 2 en $\tilde{u}$

avec coeff. de $\tilde{u}^2$ qui est > 0

donc admet un minimum

Le min de $\underline{H}$ en $\hat{u}$ est atteint en

(11)' $\hat{u}_{min} = \frac{\tilde{P_2} - S\hat{P_1}}{\varepsilon}$

(dans la suite on notera sans "~")

Alors

$$H(t,x,P) = \underline{H}(t,x,P,\hat{u}_{min}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{P_2 - SP_1}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{(P_2 - SP_1)^2}{\varepsilon} + P_1(rx_1 + dx_2)$$

donc

$$H(t,x,P) = - \frac{1}{2\varepsilon}(P_2 - SP_1)^2 + P_1(rx_1 + dx_2)$$

III b) $V(t,y)$ satisfait

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t,y,\nabla_y V) = 0$$

ce qui donne

(12) $$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{\partial V}{\partial y_2} - S\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)^2 + (ry_1 + dy_2)\frac{\partial V}{\partial y_1} = 0$$

Il faut coupler cela avec la condition limite

$V(T,y) = \varphi(y)$ donc $\forall\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2$

(13) $V(T,y) = -y_1 - Sy_2$

III c) On a

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha'(t) + \beta'(t)y_1 + \gamma'(t)y_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = \beta(t)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_2} = \gamma(t)$$

si on remplace en (12) cela donne

$$\alpha' + \beta' y_1 + \gamma' y_2 - \frac{1}{2\varepsilon}(\gamma - S\beta)^2 + \beta(ry_1 + dy_2) = 0$$

c'est à dire

$$\left[\alpha' - \frac{1}{2\varepsilon}(\gamma - S\beta)^2\right] + (\beta' + r\beta)y_1 + (\gamma' + d\beta)y_2 = 0$$

Par identification on trouve

(14) $\alpha' = \frac{1}{2\varepsilon}(\gamma - s\beta)^2$

(15) $\beta' = -r\beta$

(16) $\gamma' = -d\beta$

De (13) on doit aussi avoir par identification:

(17) $\alpha(T) = 0$

(18) $\beta(T) = -1$

(19) $\gamma(T) = -s$

On resoud d'abord (15) et (18) $\Rightarrow$

$\beta(t) = -e^{-r(t-T)}$

Ensuite de (16), (19) $\Rightarrow$

$\gamma(t) = -s + \frac{d}{r}\left[1 - e^{-r(t-T)}\right]$ on deduit

Finalement de (14), (17)

$\alpha(t) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \left[\gamma(\tau) - s\beta(\tau)\right]^2 d\tau$

Ceci nous $V(t,y)$

Finalement le controle en feed-back est donné à l'aide de (11)'

$\hat{u}\,\cancel{\phi}(t,y) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial V}{\partial y_2}(t,y) - s\frac{\partial V}{\partial y_1}(t,y)\right]$

avec $\frac{\partial V}{\partial y_2}(t,y) = \cancel{\beta_2(t)}\ \gamma(t)$

$\frac{\partial V}{\partial y_1} = \beta(t)$

$\hat{\phi}$ ne depends pas de y.

Finalement

$\hat{\phi}(t,y) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\gamma(t) - s\beta(t)\right]$

$= \frac{1}{\varepsilon}\left(s - \frac{d}{r}\right)\left(e^{r(T-t)} - 1\right] = u^*(t)$ de la Partie II.

le même qu'à la Partie II

(dûe au fait que V est affine en $\underline{y_1, y_2}$.)