Polytech Lyon, MAM5A, 2017-2018

Examen - Contrôle Optimal

Problème

Modèle simplifié de gestion d'un portefeuille d'actions.
Un gestionnaire dispose d'un capital qu'il peut investir en actions ou placer sur un compte rémunéré. On introduit les notations suivantes:
$x_1(t)$: le solde du compte à la date t (c'est une variable d'état)
$x_2(t)$: la masse d'actions détenues à la date t (également une variable d'état)
$u(t)$: la masse d'actions vendue à la date t (c'est le contrôle du problème).

On supposera que x_1, x_2, x_3 sont des quantités réeles, donc elles peuvent être aussi négatives ce qui correspond par exemple pour x_1 à un solde au découvert ou pour u à des actions achetées.
Nous avons alors le système EDO suivant:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = rx_1(t) + dx_2(t) + su(t), & \forall\, t \in [0,T] \\ x_2'(t) = -u(t), & \forall\, t \in [0,T] \\ x_1(0) = a \\ x_2(0) = b. \end{cases}$$

Dans ce système r, d, s, a, b et T sont des constantes strictement positives données:
r est le taux de rémunération du compte
d est le flux de dividendes que rapporte chaque action
s est le prix d'une action (on suppose pour simplifier que toutes les actions ont le même prix)
a et b sont des données initiales, T est un temps final.
L'objectif est de faire en sorte qu'au moment terminal T le gestionnaire dispose d'un capital le plus élevé possible, mais avec un coût de vente ou achat d'actions le moins élevé possible. On suppose pour simplifier que ce coût est donné par une expression de la forme $\frac{\epsilon}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt$, avec $\epsilon \geq 0$ donné.
Le problème de contrôle optimal sera alors

$$(2) \qquad \min \left\{ \frac{\epsilon}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt - x_1(T) - sx_2(T), \quad (x_1, x_2, u) \text{ satisfont } (1),\ u \in U_{ad} \right\}.$$

avec

$$U_{ad} = \{u \in L^2(0,T),\ u(t) \in \mathcal{U}\ \ p.p.\ t \in]0,T[\,\}$$

où $\mathcal{U}$ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

Partie I.

On suppose ici

$$\epsilon = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{U} = [-M, M] \quad \text{avec } M > 0 \text{ donné.}$$

On suppose aussi

$$s \neq \frac{d}{r}.$$

Cette parte concerne le *problème de contrôle à boucle ouverte.*

Ia) Ecrire les conditions d'optimalité (principe de minimum de Pontyagin) pour le problème (2).

Ib) Résoudre ce système d'optimalité et trouver le contrôle optimal $u^*(t)$.
Indication: il n'est pas nécessaire ici d'utiliser la méthode du tir (exploiter la forme particulière du système d'optimalité); ça sera pareil dans la **Partie II**.

Partie II.
On suppose ici

$$\epsilon > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{U} = \mathbb{R}.$$

Cette parte concerne encore le *problème de contrôle à boucle ouverte.*

IIa) Ecrire les conditions d'optimalité (principe de minimum de Pontyagin) pour le problème (2).

IIb) Résoudre ce système d'optimalité et trouver le contrôle optimal $u^*(t)$.

Partie III.
On suppose ici encore

$$\epsilon > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{U} = \mathbb{R}$$

mais cette parte concerne le *problème de contrôle à boucle fermée (en feed-back).*

IIIa) Ecrire le pré-Hamiltonien $\underline{\mathrm{H}}$ du problème (2), montrer que le Hamiltonien H existe et calculer H.

IIIb) Écrire l'équation de Hamilton-Jacobi-Belman satisfaite par la fonction valeur $V(t, y)$, avec une condition limite appropriée.

IIIc) Résoudre le problème de **IIIb)** en cherchant une solution sous la forme

$$V(t, y_1, y_2) = \alpha(t) + \beta(t)\, y_1 + \gamma(t)\, y_2, \quad \forall\ (t, y_1, y_2) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$$

avec des fonctions α, β, γ à trouver par identification.
Donner alors le contrôle en feed-back du problème (2).