Partie A:

(a) Ici $n=2,\ m=1$

$L : [0,T] \times R^2 \times R \longrightarrow R$

$L(t,x,u) = \frac{1}{2} u^2$; $\nabla_u L = u$; $\nabla_x L = 0$

$\varphi : R^2 \longrightarrow R$

$\varphi(x) = \alpha\, x_2^2$ (independante de x_1) : $\nabla_x \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha x_2 \end{pmatrix}$

L'equation d'état se met sous la forme

$y' = Ay + Bu$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a :

$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$

$B^T = (0 \ \ 1)$

les conditions d'optimalite sont

(1) $y' = Ay + Bu$

(2) $y(0) = \begin{pmatrix} y_{in} \\ v_{in} \end{pmatrix}$

(3) $p' = -A^T p$

(4) $p(T) = \nabla\varphi(y(T)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha\, y_2(T) \end{pmatrix}$

(5) $B^T p + \nabla_u L = 0 \iff p_2 + u = 0$

(b) On remplace $u = -p_2$ en (1) ce qui donne

$y' = Ay - \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \end{pmatrix}$

~~On va cherche~~ Pour tout $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in R^2$ on cherche y_η et p_η solution de (1)-(2)-(3) et $p_\eta(0) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$

On notera y et p à la place de y_η, p_η.

On a alors

(1)' $y_1' = y_2$

(2)' $y_2' = -a y_2 - p_2$

(3)' $p_1' = 0$

(4)' $p_2' = a p_2 - p_1$

(5)' $y_1(0) = y_{in}$

(6)' $y_2(0) = v_{in}$

(7)' $p_1(0) = \eta_1$

(8)' $p_2(0) = \eta_2$

On résoud (3)' et (7)' $\Rightarrow$

(6) $P_1(t) = \eta_1$

On résoud (4)' et (8)'

$$\begin{cases} P_2' = a P_2 - \eta_1 \\ P_2(0) = \eta_2 \end{cases}$$

Ceci donne (on utilise la formule de Duhamel)

(7) $P_2(t) = e^{at}\eta_2 - \frac{\eta_1}{a}(e^{at} - 1)$

On résoud (2)' - (6)' :

$$Y_2' = -aY_2 - e^{at}\eta_2 + \frac{\eta_1}{a}(e^{at} - 1) \quad \text{et } Y_2(0) = \bar{v}_{in}$$

Par la formule de Duhamel on a

$$Y_2(t) = e^{-at}\bar{v}_{in} + e^{-at}\int_0^t \left[\left(\frac{\eta_1}{a} - \eta_2\right)e^{2as} - \frac{\eta_1}{a}e^{as}\right]ds$$

ce qui donne

(8) $Y_2(t) = e^{-at}\bar{v}_{in} + \left(\frac{\eta_1}{a} - \eta_2\right)\frac{1}{a}\,sh(at) - \frac{\eta_1}{a^2}(1 - e^{-at})$

En fait on observe qu'on n'a pas besoin de calculer $Y_1(t)$ (c'est long !) car si on remplace en (4) on a $Y_1(T)$ n'intervient pas !

$$\begin{cases} P_1(T) = 0 \\ P_2(T) = 2\alpha f Y_2(T) \cancel{-v_d} \end{cases}$$

Ceci donne de (6)-(7)-(8) :

$$\begin{cases} \eta_1 = 0 \\ e^{aT}\eta_2 = 2\alpha\left[e^{-aT}\bar{v}_{in} - \frac{sh(aT)}{a}\eta_2\right] \cancel{-v_d} \end{cases}$$

La deuxième equation est une equation avec inconnue η_2, qui s'écrit:

$$\eta_2\underbrace{\left[e^{aT} + \frac{2\alpha}{a}sh(aT)\right]}_{>0 \text{ OK!}} = 2\alpha f e^{-aT}\bar{v}_{in} \cancel{-v_d}$$

On trouve

(9) $\eta_2 = \dfrac{2\alpha f e^{-aT}\bar{v}_{in} \cancel{-v_d}}{e^{aT} + \frac{2\alpha}{a}sh(aT)}$ bien definie !

On trouve alors le contrôle

$u^*(t) = -\eta_2 e^{at}$ avec η_2 donné par (9).

c) Pour $\alpha \to \infty$ on a

$$\eta_2 \longrightarrow \eta_{2,lim} = \frac{2\, e^{-aT}v_{in} - \cancel{v_d}}{\frac{2}{a}\, sh(aT)} = \frac{a\, e^{-aT} v_{in} - \cancel{v_d}}{sh(aT)}$$

donc

$$u^*_{lim}(t) = \cancel{\frac{a(v_d - e^{-aT}v_{in})}{sh(aT)} e^{at}} = -\frac{a\, e^{-aT} v_{in}\, e^{at}}{sh(aT)}$$

Ceci représente le contrôle optimal pour que le mobile arrive à la vitesse 0 au moment $t = T$.

En effet

$$Y_{2,lim}(T) = e^{-aT} v_{in} - \frac{\eta_{2,lim}}{a}\, sh(aT) =$$

$$= e^{-aT} v_{in} - \frac{a\, e^{-aT} v_{in} - \cancel{v_d}}{sh(aT)} \cdot \frac{sh(aT)}{a} = \cancel{v_d}\ 0 .$$

Partie II.

$$\underline{H} : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

a)
$$\underline{H}(t, x, u, p) = L(t, x, u) + \langle p, f(t, x, u) \rangle$$
$$= \frac{1}{2} u^2 + p_1 x_2 + p_2(-a x_2 + u)$$

donc

$$\underline{H}(t, x, u, p) = \frac{1}{2} u^2 + p_2 u + p_1 x_2 - a p_2 x_2$$

La fonction $u \longrightarrow \underline{H}(t, x, u, p)$ est un trinome degré 2 en u avec coef de u^2 égal à $\frac{1}{2}$; donc elle admet un minimum strict en $u = -p_2$. Alors on peut définir

$$H : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$H(t, x, p) = \frac{1}{2} p_2^2 - p_2^2 + p_1 x_2 - a p_2 x_2$$

donc

$$H(t, x, p) = -\frac{1}{2} p_2^2 + p_1 x_2 - a p_2 x_2$$

b) L'equation (HJB) est : trouver $V : [0,T]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.q.

$$
\begin{cases}
(10)\quad \dfrac{\partial V}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 + x_2\dfrac{\partial V}{\partial x_1} - a\,x_2\dfrac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \\
(11)\quad V(T,x) = \varphi(x) = \alpha x_2^2
\end{cases}
$$

c) On cherche une solution de (10) sous la forme

$V(t,x_1,x_2) = \cancel{\phi_1(t)x_1^2 + \phi_2(t)x_2^2}\ \phi(t)x_2^2$

Alors on doit avoir

$\cancel{\phi_1'(t)x_1^2 + 2\phi_1(t)x_1x_2}$

$\phi'(t)x_2^2 - 2\phi^2(t)x_2^2 - 2a\phi(t)x_2^2 = 0$

Comme cette egalite doit être satisfaite $\forall x_2 \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0,T]$

on déduit (equation de Ricatti)

(12) $\phi' = 2\phi^2 + 2a\phi$

La condition (11) nous donne — on divise par ϕ^2 $\rightarrow \dfrac{\phi'}{\phi^2} = 2 + 2a\dfrac{1}{\phi}$

(13) $\phi(T) = \beta$

On resoude (12)-(13) en faisant la transformation ~~(equation Bernoulli avec r=2)~~ Ricatti

$\phi = \dfrac{1}{\psi}$

On obtient $\cancel{-\dfrac{\psi'}{\psi^2} = 2\dfrac{1}{\psi^2} + \dfrac{2a}{\psi}}$ ~~ce qui donne~~

$$
\begin{cases}
\psi' = -2a\psi - 2 \\
\psi(T) = \dfrac{1}{\alpha}
\end{cases}
$$

La solution ψ est donnée par

$\psi(t) = e^{-2a(t-T)}\dfrac{1}{\alpha} - 2e^{-2at}\dfrac{1}{2a}\left(e^{2at} - e^{2aT}\right)$ donc

$$\psi(t) = \frac{1}{\alpha}\underbrace{e^{-2a(t-T)}}_{=e^{2a(T-t)} \geq 1} + \frac{1}{a}\underbrace{e^{2a(T-t)}}_{\geq 1} - \frac{1}{a} > 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

Alors $\cancel{\phi(t)=}$

$$\cancel{V(t,x) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha}e^{-2a(t-T)} + \frac{1}{a}e^{2a(T-t)} - \frac{1}{a}}\,x_2^2}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a}\right)}_{\geq 1} \underbrace{e^{2a(T-t)}}_{\geq 1} - \frac{1}{a}} > 0$$

Alors

$$V(t,x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}\right)e^{2a(T-t)} - \frac{1}{a}}\, x_2^2$$

Comme le point de minimum de la fonction

$$u \in \mathbb{R} \to \underline{H}(t,x,u,p)$$

est

$u = -P_2$ ~~alors le cas~~

alors le controle optimal est

$$\hat{u}(t,y) = -\frac{\partial V}{\partial y_2}(t,y)$$

donc

$$\hat{U}(t,y) = -\frac{2}{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}\right)e^{2a(T-t)} - \frac{1}{a}}\, y_2$$

Partie III

On considere la matrice de kalman ~~de~~ du systeme (1)

$K = (B \;\; AB)$

$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$ donc

$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$

~~Comme $\det(K) = -1 \neq 0$ et~~ et $\det(K) = -1 \neq 0$

~~ras~~ Comme $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

alors $\text{Rang}(K) = 2 = n$

Donc le system est contrôlable.