Polytech Lyon, MAM 5, 2018 - 2019

Examen - Contrôle Optimal

Problème

On considère le problème de contrôle d'un mobil que nous voulons amener de manière optimale, dans un intervalle de temps $T > 0$, proche de la vitesse 0. On a alors

$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ - c'est **la variable d'état** avec

$y_1(t) =$ position $\qquad y_2(t) =$ vitesse
et aussi
$u(t) =$ l'accelération - c'est le **contrôle**.
La coordonnée et la vitesse au moment initial $t = 0$ sont respectivement $y_{in} \in \mathbb{R}$ et $v_{in} \in \mathbb{R}$.
L'équation d'état sera alors

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1' &= \quad y_2 \\ y_2' &= -ay_2 + u \end{cases}$$

avec donnée initiale

$$(2) \qquad \begin{cases} y_1(0) = y_{in} \\ y_2(0) = v_{in}. \end{cases}$$

Le terme $-ay_2$ dans (1) tient compte du frottement; $a > 0$ représente le coefficient de frottement.
Le problème de contrôle optimal s'écrit

$$(3) \qquad ?\ min \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t)\, dt + \alpha [y_2(T)]^2, \quad (y, u) \text{ satisfont } (1) - (2),\ u \in L^2(0, T) \right\}.$$

(il n'y a pas des contraintes sur le contrôle u).
Ici $\alpha > 0$ est une constante donnée de pénalisation, considérée comme "grande".
Nous supposons qu'on a l'existence et l'unicité d'une solution optimale (u^*, y^*) de (3).

Partie I (*Contrôle optimal direct*).

Ia) Ecrire les conditions d'optimalité (principe de minimum de Pontyagin) pour ce problème.
Ib) Résoudre ce système d'optimalité et trouver le contrôle optimal $u^*(t)$.
Ic) Montrer que cette solution a une limite pour $\alpha \to +\infty$. Trouver cette limite; que représente-t-elle?

Partie II (*Contrôle optimal en feed-back*).

IIa) Ecrire le pré-Hamiltonien $\underline{\text{H}}$ du problème et calculer le Hamiltonien H.

IIb) Écrire l'équation de Hamilton-Jacobi-Belman satisfaite par la fonction valeur $V(t,x)$, résoudre cette équation avec une condition limite appropriée et donner le contrôle en feed-back pour le problème de contrôle optimal (3).
Indication: Chercher la solution sous la forme $V(t,x) = \Phi(t)x_2^2$ *avec une fonctions* $\Phi(t)$ *à trouver.*

Partie III (*Contrôlabilité*)
Montrer la contrôlabilité du système (1).