Corrigé Examen CO 2019-2020

Partie I.

(Ia) On a $n = 2$; $m = 1$

$L : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$L(t, \tilde{x}, \tilde{u}) = \frac{1}{2} \tilde{u}^2$; $\nabla_u L = \tilde{u}$; $\nabla_x L = 0$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\varphi(z) = \frac{1}{2} \alpha z_1^2$, $\forall z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$; $\nabla_z \varphi = \begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'equation d'état se met sous la form

$x' = Ax + Bu$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

les conditions d'optimalité sont.

(1) $x' = Ax + Bu$

(2) $x(0) = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^T = A$ car A est diagonale

(3) $p' = -A^T p$

(4) $p(T) = \nabla_z \varphi(x(T)) = \begin{pmatrix} \alpha x_1(T) \\ 0 \end{pmatrix}$

(5) $B^T p + \nabla_u L = 0$

L'egalite (5) ~~nous donne~~ ~~car~~ s'ecrit

$\Leftrightarrow (1 \ \ 1) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + u = 0 \Leftrightarrow p_1 + p_2 + u = 0$ donc

(5)' $u = -p_1 - p_2$

On remplace ceci en (1). En écrivant en détails ceci donne

(6) $x_1' = x_1 - p_1 - p_2$

(7) $x_2' = -x_2 - p_1 - p_2$

(8) $x_1(0) = x_1^0$

(9) $x_2(0) = 0$

(10) $p_1' = -p_1$

(11) $p_2' = p_2$

(12) $p_1(T) = \alpha x_1(T)$

(13) $p_2(T) = 0$

I b) On va resoudre le système (6)–(13)
avec inconnues x_1, x_2, p_1, p_2.
On utilise la méthode du tir : pour cela on
resoud (6)–(11) avec (14), (15) ~~avec~~ où
(14) $p_1(0) = \eta_1$
(15) $p_2(0) = \eta_2$
avec η_1, η_2 des constantes à trouver ulterieurement
On resoud ~~de~~ d'abord (10), (14) ce qui donne
$p_1(t) = \eta_1 e^{-t}$
On resoud ensuite (11), (15) ce qui donne
$p_2(\eta) = \eta_2 e^{t}$
On remplace en (6) :
$x_1' = x_1 - \cancel{\varphi}\, \eta_1 e^{-t} - \eta_2 e^{t}$
qu'on resoud avec (8) ⓪ par la formule de Duhamel
$\cancel{\oplus}\; x_1(t) = e^{t} x_1^0 - \int_0^t e^{(t-s)} (\eta_1 e^{-s} + \eta_2 e^{s}) ds$ donc
$$x_1(t) = e^{t} x_1^0 - \eta_1 e^{t} \underbrace{\int_0^t e^{-2s} ds}_{= -\frac{1}{2}\left[e^{-2s}\right]_0^t} - \eta_2 e^{t} \int_0^t 1\, ds$$
ce qui donne
$$x_1(t) = e^{t} x_1^0 + \frac{\eta_1}{2} e^{t} \left(e^{-2t} - 1\right) - \eta_2 t e^{t}$$
On obtient
$$x_1(t) = e^{t} x_1^0 - \eta_1 \, sh(t) - \eta_2 t e^{t}$$
~~Nous~~ Remarquons que nous n'avons pas besoin
de calculer $x_2(t)$
On remplace les expressions de p_1, p_2 et x_1
(dependantes de η_1, η_2) en (12), (13)
pour obtenir un système d'equations algebriques en η_1, η_2 :

(16) $\eta_1 e^{-T} = \alpha e^T x_1^0 - \alpha \eta_1 \, sh(T) - \eta_2 T e^T$

(17) $\eta_2 e^T = 0$

De (17) on deduit $\eta_2 = 0$ (car $e^T \neq 0$)

En remplaçant dans (16) on trouve

$$\eta_1 \left(e^{-T} + \alpha \, sh(T)\right) = \alpha e^T x_1^0$$

ce qui donne

(18) $\eta_1 = \dfrac{\alpha e^T x_1^0}{e^{-T} + \alpha \, sh(T)}$

Nous obtenons ~~alors~~ de (5)' le controle optimal (que nous notons maintenant u^*):

$$u^*(t) = -\eta_1 e^{-t}$$

avec η_1 donné par (18)

Ic) On déduit de (18) pour $\alpha \to +\infty$

$\eta_1 \to \eta_{1,lim}$ pour $\alpha \to \infty$

avec

(19) $\eta_{1,lim} = \dfrac{e^T x_1^0}{sh(T)}$

ce qui donne

$u^*(t) \to u^*_{lim}(t)$ pour $\alpha \to \infty$

avec

(19)' $u^*_{lim}(t) = -\eta_{1,lim} e^{-t}$

avec $\eta_{1,lim}$ donnée par (19).

On peut supposer que ~~cette solution~~ controle limite est le controle optimal pour le problème de controle avec contraintes sur l'etat final:

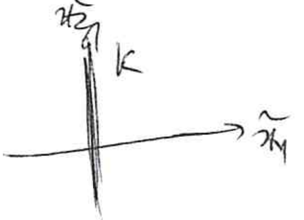
? $\min \left\{ \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt \;/\; (x,u)$ satisfont $\overline{(1)-(2)}$ de l'énoncé

et ~~$x_2(T)=0$~~ $x_1(T)=0$, $u \in L^2(0,T) \right\}$

Le principe de minimum de Pontryagin ~~s'écrit~~ pour ce problème s'écrit :

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ x(0) = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ p' = -A^T p \\ p(T) - \nabla \varphi(x(T)) \in N_K(x(T)) \quad (\text{en } \mathbb{R}^2) \\ B^T p + \nabla_u L = 0 \end{cases}$$

$x(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(T) \end{pmatrix}$



avec $K = \{0\} \times \mathbb{R}$

K c'est l'axe verticale $\{\tilde{x}_1 = 0\}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$

On a alors $N_K(x(T)) = \mathbb{R} \times \{0\}$

~~Alors le (car $(w_1, y - x(T))$~~

(car $\left\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 - 0 \\ y_2 - x_2(T) \end{pmatrix} \right\rangle \leq 0 \iff \forall y_1 \in \{0\}, \forall y_2 \in \mathbb{R}$

$\forall y_2 \in \mathbb{R}$ $\iff w_2 = 0$

$\iff w_2(y_2 - x_2(T)) \leq 0$)

Le système d'optimalité sera (6), (7), (8), (9), (10), (11), (13), (20)

avec

(20) $x_1(T) = 0$

comme le système (6) - (13) mais avec (en fait c'est (12) remplacée par (20))

La méthode du tir nous donne encore

$p_1(t) = \eta_1 e^{-t}$,

$p_2(t) = \eta_2 e^{t}$

$x_1(t) = e^t x_1^0 - \eta_1 \operatorname{sh}(T) - \eta_2 t e^t$

~~En utilisant~~ On cherche (η_1, η_2) tels que (13) et (20) soient satisfaites, c'est à dire:

$$\begin{cases} \eta_2 e^{T} = 0 & \Leftrightarrow \eta_2 = 0 \\ e^{T} x_1^0 - \eta_1 \, sh(T) - \underbrace{\eta_2}_{=0} T e^{T} = 0 \end{cases}$$

ce qui donne bien

$$\eta_1 = \frac{e^{T} x_1^0}{sh(T)}$$

ce qui est bien $\eta_{1,\lim}$ de (19)

Ceci donne bien $u(t) = u^{\circ}_{\lim}(t)$ avec $u^{\circ}_{\lim}(t)$ donnée en (19);

Partie II.

II a) $\underline{H} : [0,T) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\underline{H}(t, \tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{u}) = L(t, \tilde{x}, \tilde{u}) + \langle \tilde{p} \mid f(t, \tilde{x}, \tilde{u}) \rangle$$

avec $f(t, \tilde{x}, \tilde{u}) = A\tilde{x} + B\tilde{u} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 + \tilde{u} \\ -\tilde{x}_2 + \tilde{u} \end{pmatrix}$

donc

$$\underline{H} = \frac{1}{2}\tilde{u}^2 + \tilde{p}_1(\tilde{x}_1 + \tilde{u}) + \tilde{p}_2(-\tilde{x}_2 + \tilde{u})$$

$$\underline{H} = \frac{1}{2}\tilde{u}^2 + \tilde{u}(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2) + \tilde{p}_1 \tilde{x}_1 - \tilde{p}_2 \tilde{x}_2$$

~~On pose $\hat{u}$ le point de min de~~

$\underline{H}$ est un polynome de second degrée en $\tilde{u}$ avec $\frac{1}{2} > 0$ coef de $\tilde{u}^2$ donc admet un point de min unique $\hat{v}$ avec

(20)' $\hat{v} = \hat{v}(t, \tilde{x}, \tilde{p}) = -(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)$

Alors le hamiltonian H est

$$H(t, \tilde{x}, \tilde{p}) = \underline{H}(t, \tilde{x}, \tilde{p}, \hat{v}) = \frac{1}{2}(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 - (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 + \tilde{p}_1 \tilde{x}_1 - \tilde{p}_2 \tilde{x}_2$$

Ceci donne

$$H(t, \tilde{x}, \tilde{p}) = -\frac{1}{2}(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)^2 + \tilde{p}_1 \tilde{x}_1 - \tilde{p}_2 \tilde{x}_2$$

II) La fonction valeur ~~$V(t,Y)$~~ $V : [0,T) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$V = V(t,Y)$ satisfait l'équation (HJB):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, Y, \nabla_Y V) = 0$$

c'est à dire:

(21) $$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial y_2}\right)^2 + y_1 \frac{\partial V}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial V}{\partial y_2} = 0 \quad , \forall (t,y) \in [0,T]\times R^2$$

avec condition final

(22) $$V(T,y) = \varphi(y) = \frac{1}{2}\alpha y_1^2 \quad , \forall y \in R^2$$

On cherche V sous la form

$$V(t, y_1, y_2) = \phi(t) y_1^2$$

On remplace en (21)

$$\phi'(t) y_1^2 - \frac{1}{2}\left[2\phi(t) y_1\right]^2 + 2\phi(t) y_1 y_1 = 0 \quad , \forall y_1 \in R$$

donc $\forall y_1 \in R$

$$\phi'(t) - 2\phi^2(t) y_1^2 + 2\phi(t) y_1^2 = 0$$

Ceci donne l'EDO en ϕ : (equation de Ricatti non-linéaire)

(23) $$\cancel{\phi'(t)} \quad \phi' = 2\phi^2 - 2\phi$$

De (22) on obtient la condition final

(24) $$\phi(T) = \frac{1}{2}\alpha$$

On observe que $\phi(t) = 0$ const n'est pas solution
((24) non satisfait)

donc on divise (23) par ϕ^2 : On pose $\psi(t) = \frac{1}{\phi(t)}$

$$\underbrace{\frac{\phi'}{\phi^2}}_{=-\psi'} = 2 - \underbrace{\frac{2}{\phi}}_{=2\psi}$$

Alors ~~ϕ~~ la nouvelle inconnue ψ satisfait l'EDO linéaire

$$\psi' = 2\psi - 2$$

avec

$$\psi(T) = \frac{2}{\alpha} \quad \text{(grâce à (24))}$$

La formule de Duhamel nous donne

$$\psi(t) = e^{2(t-T)}\frac{2}{\alpha} - 2\underbrace{\int_T^t e^{2(t-s)}\,ds}_{=e^{2t}\int_T^t e^{-2s}\,ds}$$

$$e^{2t}\underbrace{\int_T^t e^{-2s}\,ds}_{= -\frac{1}{2}\left(e^{-2t} - e^{-2T}\right)}$$

donc

$$\psi(t) = e^{2(t-T)}\frac{2}{\alpha} + 1 - e^{2(t-T)} \quad , \forall t \in [0,T]$$

On observe que $\psi(t) > 0$ $\forall\, t \in [0,T)$
(car $e^{2(t-T)} < 1$, $\forall\, t < T$)

On a alors $\forall\, t \in [0,T)$

$$(25) \quad \phi(t) = \frac{1}{e^{2(t-T)}\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right) + 1}$$

donc

$V(t,Y) = \phi(t) Y_1^2$, $\forall\, (t,Y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^2$

où ϕ est donnée par (25)

Le contrôle en feed-back est alors

$u^*(t) = \hat{U}(t, x^*(t))$

avec $\hat{U}(t,Y) = \hat{v}(t, Y, \nabla_Y V(t,Y))$

$$= -\frac{\partial V}{\partial Y_1}(t,Y) - \frac{\partial V}{\partial Y_2}(t,Y) = -2\phi(t) Y_1$$

donc

$\hat{U}(t,Y) = -2\phi(t) Y_1$, $\forall\, (t,Y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^2$

donc

$u^*(t) = -2\phi(t)\, x_1^*(t)$

avec ϕ donnée par (25)

Partie III.

La matrice de Kalman est donnée par

$$K = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{car } AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$\det(K) = -2 \neq 0$ donc K inversible, donc $\mathrm{rang}(K) = 2 = n$

Alors le système (1)-(2) est contrôlable.