Polytech Lyon, MAM 5, 2019 - 2020

Examen - Contrôle Optimal

Problème

On considère le système controlé suivant avec $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ la variable d'**état** et $u(t) \in \mathbb{R}$ le **contrôle**:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & x_1 + u \\ x_2' & = & -x_2 + u \end{array} \right.$$

avec donnée initiale

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{c} x_1(0) = x_1^0 \\ x_2(0) = 0 \end{array} \right.$$

avec $x_1^0 \in \mathbb{R}$ donné.
On considère le problème de contrôle optimal suivant:

$$(3) \qquad ?\, min \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t)\, dt + \frac{1}{2}\alpha[x_1(T)]^2, \quad (x,u) \text{ satisfont } (1) - (2), \quad u \in L^2(0,T) \right\}$$

(il n'y a pas des contraintes sur le contrôle u).
Ici $\alpha > 0$ est une constante donnée de pénalisation, considérée comme "grande" et $T > 0$ donné.
Nous supposons qu'on a l'existence et l'unicité d'une solution optimale (u^*, x^*) de (3).

Partie I (*Contrôle optimal direct*).

Ia) Ecrire les conditions d'optimalité (principe de minimum de Pontyagin) pour ce problème.

Ib) Résoudre ce système d'optimalité et trouver le contrôle optimal $u^*(t)$.

Ic) Montrer que cette solution a une limite pour $\alpha \to +\infty$. Montrer que cette limite est la solution d'un système d'optimalité (principe de minimum de Pontryagin) pour un autre problème de contrôle optimal à préciser.

Partie II (*Contrôle optimal en feed-back*).

IIa) Ecrire le pré-Hamiltonien $\underline{\mathrm{H}}$ du problème (3) et calculer le Hamiltonien H.

IIb) Écrire l'équation de Hamilton-Jacobi-Belman satisfaite par la fonction valeur $V(t, y)$, résoudre cette équation avec une condition limite appropriée et donner le contrôle en feed-back pour le problème de contrôle optimal (3).
Indication: Chercher la solution sous la forme $V(t, y_1, y_2) = \Phi(t)y_1^2$ *avec une fonctions* $\Phi(t)$ *à trouver.*

Partie III (*Contrôlabilité*)
Montrer la contrôlabilité du système (1).