Corrigé Exam Contrôle MAM 5A 2021 - 2022

a) Le système contrôlé s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu & (1)' \\ x(0) = 0 & (2)' \end{cases}$$

avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nous avons

$$L : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, \tilde{x}, \tilde{u}) \longrightarrow L(t, \tilde{x}, \tilde{u}) = \frac{1}{2}\tilde{u}^2$$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$z \longrightarrow \varphi(z) = (z_1 - x_s)^2 + z_2^2$$

On a :

$$\nabla_u L = \tilde{u}$$
$$\nabla_x L = 0$$
$$\nabla \varphi = 2\begin{pmatrix} z_1 - x_s \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Le système d'optimalité (PMP) s'écrit

$$(1)' \quad x' = Ax + Bu$$
$$(2)' \quad x(0) = 0$$
$$(3)' \quad p' = -A^T p$$
$$(4)' \quad p(T) = 2\begin{pmatrix} x_1(T) - x_s \\ x_2(T) \end{pmatrix}$$

$$(5)' \quad -B^T p - u \in N_{L^2(0,T)}(u)$$

Comme $N_{L^2(0,T)}(u) = \{0\}$ l'égalité (5) s'écrit

$$-B^T p(t) - u(t) = 0 \qquad \text{p.p } t \in (0,T)$$

ce qui nous donne

$$u = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = -p_2$$

donc

$$(6)' \quad u = -p_2$$

b) On remplace (6)' en (1)' ce qui donne

(7)' $x' = Ax - Bp_2$

On doit résoudre en (x, p) le système

(7)', (2)', (3)' et (4)'.

On utilise la méthode du tir ; on va résoudre

(7)', (2)', (3)' et (8)' avec

(8)' $p(0) = \eta$ avec $\eta \in \mathbb{R}^2$ arbitraire

On commence par (3)' et (8)' donc

$$\begin{cases} p' = Ap \\ p(0) = \eta \end{cases}$$ (on remarque $-A^T = A$) (formule de Duhamel)

La solution est

$p(t) = e^{tA}\eta$

On utilise l'indication (1) avec $a = 1$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

donc

(9)' $$p(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \cos t + \eta_2 \sin t \\ -\eta_1 \sin t + \eta_2 \cos t \end{pmatrix}$$

On remplace en (7)' et (2)' ; on doit résoudre

$$\begin{cases} x' = Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_1 \sin t - \eta_2 \cos t \end{pmatrix} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

La solution est (encore la formule de Duhamel) :

$$x(t) = e^{tA}\cdot 0 + \int_0^t e^{(t-s)A}\begin{pmatrix} 0 \\ \eta_1 \sin s - \eta_2 \cos s \end{pmatrix} ds \Rightarrow$$

$$x(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \eta_1 \sin s - \eta_2 \cos s \end{pmatrix} ds$$

(10)' $$x(t) = \eta_1 \int_0^t \sin(s)\begin{pmatrix} \sin(t-s) \\ \cos(t-s) \end{pmatrix} ds - \eta_2 \int_0^t \cos(s)\begin{pmatrix} \sin(t-s) \\ \cos(t-s) \end{pmatrix} ds$$

On utilise les formules trigonometriques de l'indication (2).

$$\int_0^t \sin s \sin(t-s) = \int_0^t \frac{1}{2}\left[\cos(2s-t) - \cos(t)\right] ds =$$

$$\left[\frac{1}{4}\sin(2s-t)\right]_0^t - \frac{t}{2}\cos(t) = \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{t}{2}\cos(t)$$

$$\int_0^t \sin(s)\cos(t-s)ds = \int_0^t \frac{1}{2}\left[\sin(t) + \sin(2s-t)\right] dt$$

$$= \frac{t}{2}\sin(t) \cancel{\bullet} \frac{1}{4}\underbrace{\left[\cos(2s-t)\right]_0^t}_{=0} = \frac{t}{2}\sin(t)$$

$$\int_0^s \cos(s)\sin(t-s)ds = \int_0^t \frac{1}{2}\left[\sin t + \sin(t-2s)\right] dt$$

$$= \frac{t}{2}\sin(t) + \frac{1}{4}\underbrace{\left[\cos(t-2s)\right]_0^t}_{=0} = \frac{t}{2}\sin(t)$$

$$\int_0^t \cos(s)\cos(t-s)ds = \int_0^t \frac{1}{2}\left[\cos(t) + \cos(2s-t)\right] ds =$$

$$= \frac{t}{2}\cos(t) + \frac{1}{4}\left[\sin(2s-t)\right]_0^t = \frac{t}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$$

On a alors de ~~(9)'~~ (10)' :

$$(11)' \quad x(t) = \eta_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{t}{2}\cos(t) \\ \frac{t}{2}\sin(t) \end{pmatrix} - \eta_2 \begin{pmatrix} \frac{t}{2}\sin(t) \\ \frac{t}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix}$$

On utilise (9)' et (11)' en (4)' donc

$$\begin{pmatrix} \eta_1\cos(T) + \eta_2\sin(T) \\ -\eta_1\sin(T) + \eta_2\cos(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1(\sin(T) - T\cos(T)) - \eta_2 T\sin(T) - x_S \\ \eta_1 T\sin(T) - \eta_2(T\cos(T) + \sin(T)) \end{pmatrix}$$

On arrive au system ~~avec~~ algebrique lineaire d'inconnue $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ avec $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R}^2$

$$S\eta = r$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos(T) + T\cos(T) - \sin(T) & \sin(T) + T\sin(T) \\ -\sin(T) - T\sin(T) & \cos(T) + T\cos(T) + \sin(T) \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} -x_S \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = \left((1+T)\cos(T) - \sin(T)\right)\left((1+T)\cos(T) + \sin(T)\right) + \left((1+T)\sin(T)\right)^2$$

$$= \underbrace{(1+T)^2\cos^2(T)} - \sin^2(T) + \underbrace{(1+T)^2\sin^2(T)} = (1+T)^2 - \underbrace{\sin^2(T)}_{\leq 1}$$

$$\geq (1+T)^2 - 1 = 1 + 2T + T^2 - 1 = 2T + T^2$$

M inversible

donc $\det(M) \geq 2T + T^2 > 0$

$\det(M) = (1+T)^2 - \sin^2(T)$

$$\eta_1 = \frac{\det(M_1)}{\det(M)} \quad \text{avec} \quad M_1 = \begin{pmatrix} -x_s & \sin(T)(1+T) \\ 0 & \cos(T)(1+T) + \sin T \end{pmatrix}$$

$$(12)' \quad \eta_1 = -\frac{x_s\left(\cos(T)(1+T) + \sin(T)\right)}{(1+T)^2 - \sin^2(T)}$$

$$\eta_2 = \frac{\det(M_2)}{\det(M)} \quad \text{avec} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \cos(T)(1+T) - \sin(T) & -x_s \\ -\sin(T)(1+T) & 0 \end{pmatrix}$$

$$(13)' \quad \eta_2 = -\frac{x_s \sin(T)(1+T)}{(1+T)^2 - \sin^2(T)}$$

Alors de $(6)'$ et $(9)'$

$u = -P_2$ donc

$u(t) = \eta_1 \sin t - \eta_2 \cos t$
avec η_1, η_2 donnés par $(12)'$ et $(13)'$

c) La matrice de Kalman est

$K = (B \quad AB)$ donc

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2$ inversible, $\text{rang}(K) = 2 = n$

donc le système est contrôlable

d) $\underline{H} : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(t, \tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{u}) \longrightarrow L(t, \tilde{x}, \tilde{u}) + \langle A\tilde{x} + B\tilde{u} \mid \tilde{p} \rangle$

donc $\underline{H}(t, \tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{u}) = \frac{1}{2}\tilde{u}^2 + \tilde{x}_2 \tilde{p}_1 + (-\tilde{x}_1 + \tilde{u})\tilde{p}_2$

$= \frac{1}{2}\tilde{u}^2 + \tilde{p}_2 \tilde{u} + \tilde{x}_2 \tilde{p}_1 - \tilde{x}_1 \tilde{p}_2$

$= \frac{1}{2}\tilde{u}^2 +$

'C'est un polynome d'ordre 2 en $\tilde{u}$ et le coef de $\tilde{u}^2$ est $\frac{1}{2} > 0$

Alors $\tilde{u} \longrightarrow \underline{H}$ admet un unique point de min

(14)' $\tilde{u}_{min} = -\hat{P}_2$

Alors

$$H(t, \tilde{x}, \hat{P}) = \underline{H}(t, \tilde{x}, \hat{P}, -\tilde{P}_2)$$

$$= \frac{1}{2} \tilde{P}_2^2 - \tilde{P}_2^2 + \tilde{x}_2 \tilde{P}_1 - \tilde{x}_1 \tilde{P}_2$$

$$H(t, \tilde{x}, \tilde{P}) = -\frac{1}{2} \tilde{P}_2^2 + \tilde{x}_2 \tilde{P}_1 - \tilde{x}_1 \tilde{P}_2$$

e) La fonction valeur $V : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(t, Y) \longrightarrow V(t, Y)$

satisfait le (HJB)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, Y, \nabla_Y V) = 0 \qquad \forall (t,Y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$$

c'est à dire

(15)' $$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}(\partial_{Y_2} V)^2 + Y_2\, \partial_{Y_1} V - Y_1\, \partial_{Y_2} V = 0$$

avec condition finale

$V(T, Y) = \varphi(t, Y)$

donc

(16)' $V(T, Y) = (Y_1 - x_S)^2 + Y_2^2$

Si on connaissait une solution $V(t, Y)$ de (15)' - (16)'

alors on avait le controle en feed-back

(grâce au (14)' :)

$$\cancel{u^*(t) = -\frac{\partial V}{\partial Y_2}(t, x^*(t)) \quad \forall t \in [0,T]}$$

$$u^*(t) = -\frac{\partial V}{\partial Y_2}(t, x^*(t)), \quad \forall t \in [0,T]$$