

Contrôle Optimal

Examen - février 2022

durée 1h30 Cours et TD autorisé

Problème (contrôle optimal d'un ressort élastique)

Nous considérons le mouvement rectiligne d'un corps attaché à un ressort élastique sous l'action d'une force. Nous notons par $x_1(t)$ et $x_2(t)$ la position, respectivement la vitesse du corps au moment $t \geq 0$ et par $u(t)$ une force extérieure qui agit sur le corps. Le couple (x_1, x_2) sera l'état de notre système physique et u le contrôle. En simplifiant à l'extrême les constantes physiques de problème nous avons le système (EDO) suivant:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + u \end{cases}$$

avec condition initiale

$$(2) \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

On souhaite trouver $u(t)$ optimale qui minimise la consommation d'énergie tout en amenant le corps au moment final $T > 0$ proche d'une position souhaitée $x_s > 0$ et de la vitesse 0. En faisant une pénalisation de la contrainte au moment final nous avons le problème de contrôle suivant:

$$(3) \quad \begin{aligned} &? \min \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt + [x_1(T) - x_s]^2 + x_2^2(T) \quad \text{avec} \right. \\ &\left. (x_1, x_2, u) \text{ satisfaisant (1) - (2), } u \in L^2(0, T) \right\}. \end{aligned}$$

(pour faciliter les calculs on a pris des constantes de pénalisation égales à 1); on a supposé qu'il n'y a pas des contraintes sur le contrôle u .

Nous admettons l'existence et l'unicité d'une solution du problème (3).

a) Ecrire les conditions d'optimalité (principe de minimum de Pontryagin) pour ce problème.

b) En utilisant la méthode du tir résoudre ce système d'optimalité et trouver le contrôle optimal $u^*(t)$.

Indications:

(1) Nous admettons le résultat suivant: pour tout $a > 0$ on a

$$\text{Si } M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \text{ alors } e^{tM} = \begin{pmatrix} \cos(at) & \sin(at) \\ -\sin(at) & \cos(at) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(2) Rappelons les formules trigonométriques suivantes: pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} \sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \end{cases}$$

c) Le système (1) - (2) est-il contrôlable? Justification.

d) Donner le pré-Hamiltonien du notre problème de contrôle (3). Montrer que le Hamiltonien existe et le calculer.

e) Ecrire le système de Hamilton-Jacobi-Belman (HJB) associé à notre problème de contrôle optimal. *Ce système est trop difficile à résoudre à la main.* Indiquer en quelques mots comment procéder pour trouver un contrôle en feed-back pour (3) si on disposait d'une solution de (HJB).