Corrigé Control Optimal 2022-2023

a) Le système contrôlé (1) s'écrit

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; x^0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\qquad L(t, \tilde{x}, \tilde{u}) = \frac{1}{2}\tilde{u}^2$

Ici $n=2$, $m=1$: $L : (0,T) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

~~le système adjoint s'écrit~~ $\quad \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad \varphi(z) = \frac{\gamma}{2}(z_1^2 + z_2^2)$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ $\forall z \in \mathbb{R}^2$

$\cancel{p' = A^T p}$

$\nabla_x L = 0$: $\nabla_u L = \tilde{u}$: $\nabla \varphi(z) = \gamma \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ $\qquad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

A^T. Le ~~système~~ problème adjoint s'écrit

avec $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} p' = -A^T p \\ p(T) = \nabla \varphi(x(T)) \end{cases}$$

$B^T p + \nabla_u L = (0 \;\; 1)\, p + u = p_2 + u$

Alors le système d'optimalité s'écrit :

(on écrit x au lieu de x^*
p au lieu de p^*
u au lieu de u^*)

$$\begin{cases} (1) & x_1' = x_1 - x_2 \\ (2) & x_2' = -x_2 + u \\ (3) & x_1(0) = a \\ (4) & x_2(0) = 0 \\ (5) & p_1' = -p_1 \\ (6) & p_2' = p_1 + p_2 \\ (7) & p_1(T) = \gamma\, x_1(T) \\ (8) & p_2(T) = \gamma\, x_2(T) \\ (9) & -p_2 - u = 0 \end{cases}$$

b) Pour $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ arbitraire on considère les conditions initiales en p

$$\begin{cases} (10) & p_1(0) = \eta_1 \\ (11) & p_2(0) = \eta_2 \end{cases}$$

D'autre part on élimine u de (9) : $u = -p_2$ et on le remplace en (2). L'équation (2) devient

(2)' $\quad x_2' = -x_2 - p_2$

Nous allons résoudre le problème de Cauchy en $\binom{x}{p}$ qui est le système : (1), (2)', (3), (4), (5), (6), (10), (11).
On commence par (5) et (10) car il y a seulement l'inconnue P_1 ; on obtient

(12) $P_1(t) = \eta_1 e^{-t}$

On résoud ensuite (5) et (11)

$P_2' = P_2 + \eta_1 e^{-t}$ avec $P_2(0) = \eta_2$, ce qui donne

$$P_2(t) = e^t \eta_2 + \int_0^t e^{(t-s)} \eta_1 e^{-s} ds = e^t \eta_2 + e^t \int_0^t \underbrace{e^{-2s}}_{=\left(-\frac{1}{2}e^{-2s}\right)'} \eta_1 ds$$

ce qui donne

$$P_2(t) = e^t \eta_2 + e^t \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \eta_1 \quad \text{donc}$$

(13) $P_2(t) = e^t \eta_2 + \eta_1 \,\text{sh}\, t$ sh c'est "sinus hyperbolique"

On résoud (2)' et (4) donc

$$\begin{cases} x_2' = -x_2 - e^t \eta_2 - \eta_1 \,\text{sh}\, t \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$x_2(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} \left[-e^s \eta_2 - \eta_1 \,\text{sh}\, s\right] ds =$$

$$= -e^{-t} \int_0^t \left(\eta_2 e^{2s} + \eta_1 e^s \,\text{sh}\, s\right) ds$$

Nous avons $\int_0^t e^{2s} = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)$

$$e^s \,\text{sh}\, s = \frac{1}{2} e^s (e^s - e^{-s}) = \frac{1}{2}(e^{2s} - 1) \quad \text{donc}$$

$$\int_0^t e^s \,\text{sh}\, s \, ds = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(e^{2t} - 1) - t\right] = \frac{1}{4}(e^{2t} - 1) - \frac{1}{2} t$$

Ceci nous donne

$$x_2(t) = \cancel{\text{sh}\, t} - \eta_2 \,\text{sh}(t) - \eta_1 \left[\frac{1}{2} \,\text{sh}(t) - \frac{1}{2} t e^{-t}\right]$$

donc

(14) $x_2(t) = -\left(\eta_2 + \frac{\eta_1}{2}\right) \text{sh}(t) + \frac{1}{2} \eta_1 t e^{-t}$

On résoud (1) et (3) :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \left(\eta_2 + \frac{\eta_1}{2}\right) \text{sh}(t) - \frac{1}{2} \eta_1 t e^{-t} \\ x_1(0) = a \end{cases}$$

On a

$$x_1(t) = e^t a + \int_0^t e^{(t-s)} \left[\left(\eta_2 + \frac{\eta_1}{2}\right) sh(s) - \frac{1}{2}\eta_1 s e^{-s} \right] ds$$

$$= e^t a + e^t \left[\left(\eta_2 + \frac{\eta_1}{2}\right) \int_0^t e^{-s} sh(s)\, ds - \frac{\eta_1}{2} \int_0^t s e^{-2s} ds \right]$$

On a :

$$e^{-s} sh(s) = \frac{1}{2} e^{-s}(e^s - e^{-s}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2s}) \quad \text{donc}$$

$$\int_0^t e^{-s} sh(s) = \frac{1}{2}\left[t - \int_0^t \left(\frac{e^{-2s}}{-2}\right)' ds \right] = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}(e^{-2t} - 1)$$

D'autre part en intégrant par parties on obtient

$$\int_0^t s e^{-2s} ds = \int_0^t s \left(\frac{e^{-2s}}{-2}\right)' ds = -\frac{t}{2} e^{-2t} + 0 + \frac{1}{2} \int_0^t \underbrace{e^{-2s}}_{= \left(\frac{e^{-2s}}{-2}\right)'} ds$$

donc

$$\int_0^t s e^{-2s} ds = -\frac{t}{2} e^{-2t} + \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2t}\right)$$

Alors

$$(15) \quad x_1(t) = e^t a + \left(\eta_2 + \frac{\eta_1}{2}\right)\left[\frac{1}{2} t e^t - \frac{1}{2} sh(t)\right] + \eta_1 \left[\frac{t}{4} e^{-t} - \frac{1}{4} sh(t) \right]$$

c) En remplaçant (12), (13), (14), (15) in (7), (8) on trouve

$$e^T a + \left(\eta_2 + \frac{\eta_1}{2}\right)\left[\frac{1}{2} T e^T - \frac{1}{2} sh(T)\right] + \eta_1 \left[\frac{T}{4} e^{-T} - \frac{1}{4} sh(T)\right] = \frac{1}{\nu} e^{-T} \eta_1$$

et

$$-\left(\eta_2 + \frac{\eta_1}{2}\right) sh(T) + \frac{1}{2} T e^{-T} \eta_1 = \frac{1}{\nu} e^T \eta_2 + \frac{1}{\nu} sh(T)\, \eta_1$$

On écrit ce système sous la forme

$$M \eta = b$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{où}$$

$$M_{11} = \frac{1}{4} T e^{T} - \frac{1}{4} sh(T) + \frac{T}{4} e^{-T} - \frac{1}{4} sh(T) - \frac{1}{5} e^{-T}$$

donc

$$M_{11} = \frac{1}{2} T\, sh(T) - \frac{1}{2} sh(T) - \frac{1}{5} e^{-T}$$

$$M_{12} = \frac{1}{2} T e^{T}$$

$$M_{21} = -\frac{1}{2} sh(T) + \frac{1}{2} T e^{-T} - \frac{1}{5} sh(T)$$

$$M_{22} = -sh(T) - \frac{1}{5} e^{T}$$

d) La ~~ma~~ matrice de Kalman est

$K = (B \quad AB)$ $\qquad AB = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

donc

$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \det(K) = 1$ donc K matrice inversible, $rang(K) = 2$

Donc le système est contrôlable

e) Le pré-hamiltonien est

$\underline{H} : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\underline{H}(t, \tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{u}) = L(t, \tilde{x}, \tilde{u}) + \langle A\tilde{x} + B\tilde{u} \mid \tilde{p} \rangle$

donc

$\underline{H}(t, \tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{u}) = \frac{1}{2} \tilde{u}^2 + \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \\ -\tilde{x}_2 + \tilde{u} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

On a alors

$\underline{H}(t, \tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{u}) = \frac{1}{2} \tilde{u}^2 + \tilde{p}_1(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + \tilde{p}_2(\tilde{u} - \tilde{x}_2)$

Comme fonction de $\hat{u}$ la fonction $\underline{H}$ est un polynôme d'ordre 2 et elle admet un point de minimum

$$\tilde{u}_{min} = -\frac{\tilde{p}_2}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

(16) $\qquad \hat{u}_{min} = -\tilde{p}_2$

Alors

$\min_{\hat{u} \in \mathbb{R}} \underline{H}(t, \hat{x}, \hat{p}, \hat{u}) = \underline{H}(t, \tilde{x}, \tilde{p}, -\tilde{p}_2)$

Alors le Hamiltonien est la fonction

$H : [0,T) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$H(t, \tilde{x}, \hat{p}) = \frac{1}{2}(-\tilde{P}_2)^2 + \hat{P}_1(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + \hat{P}_2(-\hat{P}_2 - \tilde{x}_2)$

donc

$H(t, \tilde{x}, \tilde{p}) = -\frac{1}{2}\tilde{P}_2^{\,2} - \tilde{x}_2\hat{P}_2 + \tilde{P}_1(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)$

f) Alors le système (HJB) s'écrit :

Trouver $V(t,y)$ $\quad V : [0,T) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

V de classe C^1 tel que

$$(17)\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial y_2}\right)^2 - y_2\dfrac{\partial V}{\partial y_2} + (y_1 - y_2)\dfrac{\partial V}{\partial y_1} = 0 & \forall (t,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^2 \\ V(T,y) = \dfrac{\nu}{2}(y_1^2 + y_2^2) & , \forall y \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

g) Si on dispose d'une solution $V(t,y)$ de ~~__~~ (17) ;

nous introduisons la fonction

$\hat{u} : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\hat{u}(y,t) = -\frac{\partial V}{\partial y_2}(t,y)$ $\quad$ (grâce à (16) avec $\nabla V(t,y)$ à la place de $\tilde{p}$)

le contrôle optimal en feed-back sera alors

$u^*(t) = -\frac{\partial V}{\partial y_2}(t, x^*(t))$

où $x^*(t)$ est l'état optimal.

x^* sera alors la solution du pb de Cauchy

$$\begin{cases} (x_1^*)' = x_1^* - x_2^* \\ (x_2^*)' = -x_2^* - \dfrac{\partial V}{\partial y_2}(t, x^*(t)) \end{cases}$$

avec conditions initiales

$$\begin{cases} x_1^*(0) = a \\ x_2^*(0) = 0 \end{cases}$$