Polytech Lyon, MAM5A, 2022-2023

Contrôle Optimal

Examen - février 2023

durée 1h30 Cours et TD autorisé

Problème (*insectes nuisibles versus insectes prédateurs*)
La population d'insectes nuisibles dans un champ de céréales croît exponentiellement si on laisse faire. Pour contrer cette évolution, un insecte prédateur stérile est introduit dans cette population. Ces insectes prédateurs se nourissent des premiers insectes et, comme ils sont stériles, finissent par mourir s'il n'y a plus de ces insectes. Les insectes prédateurs sont également nuisibles pour les céréales, il est donc souhaitable qu'ils disparaissent aussi.
Les variables d'état du système considéré seront $x_1(t)$ (la population des insectes nuisibles) et $x_2(t)$ (la population des insectes prédateurs) ; le contrôle à travers lequel on peut agir sur le système sera le taux $u(t)$ auquel on introduit ou élimine les insectes prédateurs.
En simplifiant à l'extrême les constantes biologiques du problème, notre système contrôlé sera le système EDO suivant :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' &=& x_1 - x_2 \\ x_2' &=& -x_2 + u \end{array} \right.$$

avec conditions initiales

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1(0) &=& a \\ x_2(0) &=& 0 \end{array} \right.$$

avec $a > 0$ donné qui représente la population initiale des insectes nuisibles.

On souhaite trouver $u(t)$ optimale qui minimise le coût de l'opération tout en amenant les deux populations d'insectes proches de 0 au moment final $T > 0$. En faisant une pénalisation de la contrainte au moment final nous avons le problème de contrôle suivant :

$$(3) \qquad \begin{array}{c} min \left\{ \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^T u^2(t)\,dt + \dfrac{1}{2}\gamma[(x_1(T))^2 + (x_2(T))^2] \quad \text{avec} \right. \\ (x_1, x_2, u) \quad \text{satisfaisant } (1) - (2),\ u \in L^2(0,T)\} \end{array}$$

avec $\gamma > 0$ une constante de pénalisation assez grande. Pour faciliter la modélisation on suppose qu'il n'y a pas des contraintes sur le contrôle u.
Nous admettons l'existence et l'unicité d'une solution du problème (3).

a) Ecrire les conditions d'optimalité (principe de minimum de Pontryagin) pour ce problème.

b) Utilisez la méthode du tir qui consiste à introduire une donnée initiale "fictive" $\eta \in \mathbb{R}^2$ pour l'état adjoint p ; résoudre le système d'optimalité en ignorant dans cette première étape les conditions au moment final T.

c) Prendre en compte les conditions au moment final et écrire un système d'équations avec inconnue η. Montrer qu'on peut écrire ce système sous la forme

$$M\eta = b$$

avec M matrice et b vecteur à calculer. Ne pas résoudre ce système car il est trop compliqué !

d) Le système (1) - (2) est-il contrôlable ? Justification.

e) Donner le pré-Hamiltonien du problème de contrôle (3). Montrer que le Hamiltonien existe et le calculer.

f) Ecrire le système de Hamilton-Jacobi-Belman (HJB) associé à notre problème de contrôle optimal (*ce système est trop difficile à résoudre à la main*).
Indiquer en quelques mots comment procéder pour trouver un contrôle en feed-back pour (3) si on disposait d'une solution de (HJB).