Corrigé Exam. Contrôle Optimal 2023-2024

I a) ~~le principe de~~

On pose $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(t,x,u) = -\alpha x + u$ $\qquad \varphi(x) = \beta(x-b)^2$

$L : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$L(t,x,u) = u^2$

Le principe de minimum de Pontryagin donne

$$\begin{cases} x' = -\alpha x + u & (1)' \\ x(0) = a & (2)' \\ p' = \alpha p & (3)' \\ p(T) = 2\beta\left(x(T) - b\right) & (4)' \\ p + 2u = 0 & (5)' \end{cases}$$

car $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ et $N_{\mathcal{U}}(u) = \{0\}$

car $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = -\alpha$

$\varphi'(x) = 2\beta(x-b)$

$\frac{\partial L}{\partial u} = 2u$, $\frac{\partial f}{\partial u} = 1$

I b) On remplace $u = -\frac{p}{2}$ en $(1)'$ ce qui donne

$(1)'$ $x' = -\alpha x - \frac{p}{2}$

$(2)'$ $x(0) = a$

$(3)'$ $p' = \alpha p$

$(4)'$ $p(T) = 2\beta\left(x(T) - b\right)$

On utilise la méthode du tir : on résoud $(1)'$-$(2)'$-$(3)'$ avec $p(0) = \eta \in \mathbb{R}$, η à trouver et on remplace en $(1)'$ ⇒

On trouve $p(t) = \eta e^{\alpha t}$

$$x' = -\alpha x - \frac{\eta}{2} e^{\alpha t}$$

avec $x(0) = a$ cela donne

$$x(t) = e^{-\alpha t} a - \frac{\eta}{2} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} e^{\alpha s} \, ds$$

$$= e^{-\alpha t} a - \frac{\eta}{2} e^{-\alpha t} \frac{1}{2\alpha}\left(e^{2\alpha t} - 1\right)$$

donc

$$x(t) = e^{-\alpha t} a - \frac{\eta}{2\alpha} \operatorname{sh}(\alpha t)$$

On remplace en $(4)'$ ce qui donne l'équation

$$\eta e^{\alpha T} = 2\beta\left(e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} \operatorname{sh}(\alpha T) - b\right)$$ donc

$$\eta\Big(\underbrace{\underbrace{e^{\alpha T}}_{>0} + \frac{\beta}{\alpha}\underbrace{sh(\alpha T)}_{>0}}_{>0}\Big) = 2\beta\left(e^{-\alpha T}a - b\right)$$

donc

$$(5)' \quad \eta = 2\beta\,\frac{e^{-\alpha T}a - b}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha}\, sh(\alpha T)}$$

On a alors

$u^*(t) = -\frac{p}{2}$ donc

$u^*(t) = -\frac{\eta}{2}e^{\alpha t}$

avec η donné par $(5)'$

Partie II

II a) Comme dans la Partie I on a

$x' = -\alpha x + u$

$x(0) = a$

$p' = \alpha p$

$p(T) = \cancel{2\beta(x(T)-b)}\ \beta r'(x(T)-b)$

$p + 2u = 0$

En remplaçant $u = -\frac{p}{2}$ dans la première equation on trouve

$(6)' \quad x' = -\alpha x - \frac{p}{2}$

$(7)' \quad x(0) = a$

$(8)' \quad p' = \alpha p$

$(9)' \quad p(T) = \beta r'(x(T)-b)$

II b) On considère $p(0) = \eta$ et comme dans la Partie I on trouve $p(t) = \eta e^{\alpha t}$ et $x(t) = e^{-\alpha t}a - \frac{\eta}{2\alpha}\, sh(\alpha t)$

~~ce que do (9)' donc~~

$\cancel{\eta e^{\alpha T} = \beta r'(}$

ce que donne avec $(9)'$:

$$\eta e^{\alpha T} = \beta r'\left(e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T)\right)$$

Cette equation s'écrit

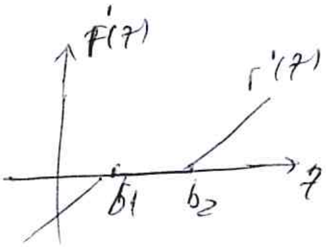
$$(10)' \quad g(\eta) = 0$$

avec $g : R \longrightarrow R$

$$g(\eta) = \eta e^{\alpha T} - \beta r'\left(e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T)\right)$$

II c) La fonction r est de classe C^1, donc r continue donc g continue

~~On observe~~ $\cancel{\lim_{z \to \infty} r'(z)}$ On a



$$r'(z) = \begin{cases} 2(z-b_1) & \text{si } z < b_1 \\ 0 & \text{si } b_1 \leq z \leq b_2 \\ 2(z-b_2) & \text{si } z > b_2 \end{cases}$$

On observe que $\lim_{z \to \infty} r'(z) = \infty$ et $\lim_{z \to -\infty} r'(z) = -\infty$

On obtient alors facilement

$g(\eta) \longrightarrow \infty$ si $\eta \longrightarrow \infty$

et

$g(\eta) \longrightarrow -\infty$ si $\eta \longrightarrow -\infty$

D'autre part observons que la fonction $z \longrightarrow r'(z)$ est croissante, donc la fonction

$$\eta \longrightarrow -\beta r'\left(e^{-\alpha T} a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T)\right) \text{ est}$$

croissante

Alors g est strictement croissante

Ceci montre que g est bijective de R en R donc on a l'existence et l'unicité d'une solution de $(10)'$.

II d) Soit η la racine de $(10)'$

Cas 1. Si $e^{-\alpha T}a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) \in (b_1, b_2)$ ~~alors~~ alors.

~~de (10)' ⇒~~ $r'(e^{-\alpha T}a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T)) = 0$

Alors de $(10)'$ on deduit $\eta = 0$

On a donc

$\eta = 0$ si $b_1 \le e^{-\alpha T}a < b_2$

Donc dans ce cas $u^* = 0$

Cas 2. Si $e^{-\alpha T}a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) < b_1$ alors

$$r'(e^{-\alpha T}a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T)) = 2\left[e^{-\alpha T}a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) - b_1\right]$$

On deduit de $(10)'$

$$\eta e^{\alpha T} - 2\beta\left[e^{-\alpha T}a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) - b_1\right] = 0$$

ce qui donne $\quad$ donc

$$\eta\left[e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)\right] = 2\beta\left(e^{-\alpha T}a - b_1\right)$$

$$(11)' \quad \eta = \frac{2\beta(e^{-\alpha T}a - b_1)}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)}$$

En remplaçant ce η dans la condition de Cas 2 on a

$$e^{-\alpha T}a - b_1 - \frac{\beta}{\alpha}\frac{sh(\alpha T)(e^{-\alpha T}a - b_1)}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)} < 0$$

c'est à dire $\left(e^{-\alpha T}a - b_1\right)\left(1 - \frac{\frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)}\right) < 0$ donc

$$\left(e^{-\alpha T}a - b_1\right)\underbrace{\left(\frac{e^{\alpha T}}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)}\right)}_{>0} < 0 \iff e^{-\alpha T}a - b_1 < 0$$

On deduit alors

si $e^{-\alpha T}a < b_1$ alors η est donnée par $(11)'$. Donc

$$u^*(t) = \frac{\beta(b_1 - e^{-\alpha T}a)}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} sh(\alpha T)} e^{\alpha t} \quad \text{dans ce cas.}$$

(remarque: $u^* > 0$)

Cas 3. Si $e^{-\alpha T}a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) > b_2$ alors

$$r'(e^{-\alpha T}a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T)) = 2\left[e^{-\alpha T}a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) - b_1\right]$$

~~donc de~~ ce qui donne de $(10)'$:

$$\eta e^{\alpha T} - 2\beta\left[e^{-\alpha T}a - \frac{\eta}{2\alpha} sh(\alpha T) - b_2\right] = 0$$

Comme dans le Cas 2 on trouve

$$(12)' \quad \eta = \frac{2\beta\,(e^{-\alpha T} - b_2)}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha}\,sh(\alpha T)}$$

Il faut alors avoir

$$e^{-\alpha T}a - b_2 - \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{sh(\alpha T)}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha}\,sh(\alpha T)}\,(e^{-\alpha T}a - b_2) > 0$$

Ceci donne comme en Cas 2 : $\Leftrightarrow e^{-\alpha T}a - b_2 > 0$

On deduit alors :

si $e^{-\alpha T}a > b_2$ alors η est donné par $(12)'$. Donc

$$u^*(t) = \frac{\beta\,(b_2 - e^{-\alpha T})}{e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha}\,sh(\alpha T)}\,e^{\alpha T}$$

(remarque : $u^* < 0$)

Partie III.

III a) le pré-Hamiltonian $\underline{H}$ est donné par

$\underline{H} : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\underline{H}(t,\tilde{x},\tilde{u},\tilde{p}) = \tilde{p}\,f(t,\tilde{x},\tilde{u}) + L(t,\tilde{x},\tilde{u}) = \tilde{p}(-\alpha\tilde{x} + \tilde{u}) + \tilde{u}^2 = \tilde{u}^2 + \tilde{p}\tilde{u} - \alpha\tilde{x}\tilde{p}$$

Ceci est un polinôme de degrée 2 en $\tilde{u}$ qui admet un minimum en $\tilde{u} = -\frac{\tilde{p}}{2}$. ~~Alors~~

Alors le Hamiltonian est donné par

$H : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$H(t,\tilde{x},\tilde{p}) = \underline{H}(t,\tilde{x},-\frac{\tilde{p}}{2},\tilde{p}) = \frac{\tilde{p}^2}{4} - \frac{\tilde{p}^2}{2} - \alpha\tilde{x}\tilde{p}$$

donc

$$H(t,\tilde{x},\tilde{p}) = -\frac{\tilde{p}^2}{4} - \alpha\tilde{x}\tilde{p}.$$

III b) L'equation HJB sera

Trouver $V : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (fonction valeur) telle que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t,y,\frac{\partial V}{\partial y}(t,y)) = 0$$

donc

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 - \alpha y\,\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

avec condition final

$$V(T,y) = \beta\Gamma(y) = \beta\begin{cases} (y-b_1)^2 & \text{si } y < b_1 \\ 0 & \text{si } b_1 \le y \le b_2 \\ (y-b_2)^2 & \text{si } y > b_1 \end{cases}$$