Polytech Lyon, MAM5A, 2023-2024

Examen - Contrôle Optimal

Problème

On considère un modèle très simplifié du mécanisme régissant le niveau de glucose dans le sang. On désigne par $x(t)$ la quantité de glucose au temps t à partir de l'instant initial $t_0 = 0$ ($x(t)$ sera **l'état** du système). On suppose que si on ne fait rien, elle diminuera à un taux proportionnel à la quantité ($x' = -\alpha x$). Dans le but de maintenir le niveau de glucose à un niveau acceptable, du glucose est transfusé dans le sang avec une vitesse de transfusion $u(t)$ (cette vitesse $u(t)$ sera le **contrôle** du problème).
L'évolution de l'état x se fait donc suivant l'équation différentielle

$$(1) \qquad x'(t) = -\alpha x(t) + u(t), \quad t \geq 0$$

avec $\alpha > 0$ une constante donnée. On considère aussi la donnée initiale

$$(2) \qquad x(0) = a$$

avec $a > 0$ donnée représentant la quantité de glucose au moment initial. On se propose d'amener, à un moment $T > 0$ donné, la quantité de glucose proche d'un intervalle $[b_1, b_2]$ donné, mais avec un coût minimal. Nous considérons alors comme modèle très simple, le problème de contrôle suivant:

$$(3) \qquad min \ \left\{ \int_0^T u^2(t)\, dt + \beta r(x(T)), \quad (x,u) \text{ satisfont } (1)-(2),\ u \in U_{ad} \right\}.$$

où $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, qui sera précisée dans la suite et qui prend en compte la "distance" à l'intervalle $[b_1, b_2]$ et $\beta > 0$ est une constante donnée.
On suppose

$$U_{ad} = L^2(0,T)$$

ce qui est une hypothèse très simplificatrice (en réalité on devrait ajouter aussi des contraintes comme par exemple $u \geq 0$).
Nous admettons qu'on a l'existence et l'unicité d'une solution optimale (x^*, u^*) de (3).

Partie I (*Contrôle optimal direct*)
On suppose ici $b_1 = b_2 = b$ et

$$r(z) = (z-b)^2, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}$$

avec $b > 0$ donnée (c'est le cas où l'intervalle $[b_1, b_2]$ se réduit à un seul point b).

Ia) Ecrire les conditions d'optimalité (principe de minimum de Pontyagin) pour le problème (3).

Ib) Résoudre ce système d'optimalité et trouver le contrôle optimal $u^*(t)$.

Partie II (*Contrôle optimal direct*)
On suppose ici

$$r(z) = \begin{cases} (z-b_1)^2 & \text{si} \quad z < b_1 \\ 0 & \text{si} \quad b_1 \leq z \leq b_2 \\ (z-b_2)^2 & \text{si} \quad z > b_2 \end{cases}$$

avec b_1, b_2 données tels que $0 < b_1 < b_2$.

IIa) Ecrire le système d'optimalité (principe de minimum de Pontyagin) dans ce cas et réduire le problème à un système de deux équations différentielles avec inconnues $x(t)$ et $p(t)$ où $p(t)$ est la variable adjointe.

Pour résoudre ce système on utilisera dans la suite de l'exercice la méthode usuelle de tir.

IIb) Réduire le système à résoudre à une équation avec inconnue $\eta \in \mathbb{R}$, du type

$$g(\eta) = 0 \tag{4}$$

avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à préciser.

IIc) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution de (4).

IId) Résoudre l'équation (4) et trouver η; donner ensuite le contrôle $u^*(t)$.

Partie III (*Contrôle optimal en feed-back*).
On considère ici encore la fonction r comme dans la **Partie II.**

IIIa) Ecrire le pré-Hamiltonien $\underline{\mathrm{H}}$ du problème, montrer que le Hamiltonien H existe et calculer H.

IIIb) Écrire l'équation de Hamilton-Jacobi-Belman satisfaite par la fonction valeur $V(t,x)$, avec une condition limite appropriée.
(ce système est trop difficile à résoudre "à la main").