Polytech Lyon, Mécanique 3 2014-2015

Outils Mathématiques pour l'Ingénieur (OMI 1)

Partiel, novembre 2014

Durée 2h - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.
Soit $\varphi : I\!R^3 \to I\!R^3$ donnée par

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} \qquad \forall\, x = (x_1, x_2, x_3)^T \in I\!R^3.$$

Nous notons par $\mathcal{B}_{c3}$ la base canonique en $I\!R^3$.
Considérons aussi les vecteurs $u_1 = (1,1,1)^T,\ u_2 = (-1,0,1)^T,\ u_3 = (0,-1,1)^T$.
a) Montrer que l'application φ est linéaire.
b) Montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base en $I\!R^3$; on notera par $\mathcal{B}'_3$ cette base.
c) Donner la matrice A_1 de φ dans les bases $\mathcal{B}_{c3}$ et $\mathcal{B}_{c3}$ (c'est à dire, donner $M_{\mathcal{B}_{c3},\mathcal{B}_{c3},\varphi}$).
d) Donner la matrice A_2 de φ dans les bases $\mathcal{B}'_3$ et $\mathcal{B}_{c3}$ (c'est à dire, donner $M_{\mathcal{B}'_3,\mathcal{B}_{c3},\varphi}$).
e) Donner la matrice A_3 de φ dans les bases $\mathcal{B}'_3$ et $\mathcal{B}'_3$ (c'est à dire, donner $M_{\mathcal{B}'_3,\mathcal{B}'_3,\varphi}$).

Exercice 2.
Soit $\alpha \in I\!R$ un paramètre et considérons le système algébrique suivant:
trouver $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in I\!R^3$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rrcl} x_1 & -2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 + \alpha x_3 & = & 1 \\ & 2x_2 - 3x_3 & = & 2. \end{array}\right.$$

a) Ecrire le système sous la forme matricielle $Ax = b$ avec A et b à préciser.
b) Trouver $\alpha \in I\!R$ tel que le rang de la matrice A soit égal à 2. Le système a-t-il des solutions dans ce cas?
c) Trouver $\alpha \in I\!R$ tel que le rang de la matrice A soit égal à 3. Montrer que le système a une seule solution dans ce cas et trouver cette solution en fonction de α.

Exercice 3.
Considérons la matrice $A \in \mathcal{M}_3(I\!R)$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c \in I\!R$ des paramètres.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour a, b, c telle que la matrice A soit diagonalisable en $I\!R$.
Trouver dans ce cas (où A est diagonalisable en $I\!R$) deux matrices $P, D \in \mathcal{M}_3(I\!R)$ avec P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.