Corrigé Exam OMJ1 2015-2016

Exo 1. a) $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\} = \ker(A)$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

donc E est un sous-espace vectoriel

b) Si ~~$f_1, f_2 \in F$ et λ~~ $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable et

$(\lambda f + \mu g)'(0) + 3(\lambda f + \mu g)(1) = \lambda[f'(0) + 3f(1)] + \mu[g'(0) + 3g(1)] = 0 + 0 = 0$

donc F est un sous-espace vectoriel

c) si $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ a-t-on

$(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda f + \mu g)(-x)$? Mais

$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x)$

$= (\lambda f + \mu g)(-x)$ OK!

donc sous-espace vectoriel

d) Prendre $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$

$2, 0 \in \mathbb{R}$

$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin F$ (car $-2 + 2^2 \neq 0$)

donc F n'est pas un sous-espace vectoriel

Exo 2.

a) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -8 & 8 \\ 8 & -8-\lambda & 8 \\ 4 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

~~col1×1 → col2 et col1×(−1) → col3~~

$= \begin{vmatrix} 8-\lambda & -8 & \lambda \\ 8 & & 0 \\ 4 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$

$\overset{\text{col1}\times 1 \to \text{col2}}{=} \begin{vmatrix} 8-\lambda & -\lambda & 8 \\ 8 & -\lambda & 8 \\ 4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-\lambda) \begin{vmatrix} 8-\lambda & 1 & 8 \\ 8 & 1 & 8 \\ 4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{l_2 \times (-1) \to l_1}{=} -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 8 \\ 4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

donc $P_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 4)$

les val. propres de A sont

$\mu_1 = 0$ multiplicité algébrique $m_1 = 2$

$\mu_2 = 4$ — // — $m_2 = 1$

~~Rang~~ $\text{rang}(A - 0 \cdot I) = \text{rang}(A) = 1 \Rightarrow r_1 = 3 - 1 = 2$

$\text{rang}(A - 4I) = 2$ $\qquad r_2 = 3 - 2 = 1$

Donc A est diagonalisable

On pose $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

P_1 ou P_2 $= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A)$ avec $y = 1 : z = 0 \Rightarrow x = 1$

$y = 0 : z = 1 \Rightarrow x = -1$

Prendre $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 8 \\ 8 & -12 & 8 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Prendre $P_3 \in \ker(A - 4I_3)$

~~P~~ prendre $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ avec

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; ~~P^{-1}~~

On calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) On pose $B = P \cdot D_1 \cdot P^{-1}$ avec $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(remarques $D_1^2 = D$). Alors

$B^2 = P D_1 \cancel{P^{-1}} \cdot \cancel{P} D_1 P^{-1} = P D_1^2 P^{-1} = P D P^{-1} = A$

~~Ao~~ On a aussi

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ donc $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Ex 3.

a) Equation caractéristique :

$$r^3 - 2r^2 + mr = 0 \iff$$

$$r(r^2 - 2r + m) = 0$$

Une solution est $r_1 = 0$

Résoudre $r^2 - 2r + m = 0$

$$\Delta = 4 - 4m = 4(1-m)$$

$\Delta > 0 \iff m < 1$

Cas 1. $m < 1$

Cas 1 a) si $m = 0$ alors on a une racine double $r_1 = r_2 = 0$ et une racine simple $r_3 = 2$

Alors les solutions sont

$$c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} \quad , c_1, c_2, c_3 \in R$$

Cas 1 b) si $m \neq 0$, donc $m \in]-\infty, 1[- \{0\}$

alors on a 3 racines simples :

$r_1 = 0$; $r_2 = 1 - \sqrt{1-m}$ et $r_3 = 1 + \sqrt{1-m}$

les solutions sont alors

$$c_1 + c_2 e^{(1+\sqrt{1-m})t} + c_3 e^{(1-\sqrt{1-m})t} ,$$

$$c_1, c_2, c_3 \in R$$

Cas 2. $m = 1$

On a alors $r_1 = 0$ racine simple et $r_2 = 1$ racine double

Les solutions sont

$$c_1 + (c_2 + c_3 t) e^t$$

Cas 3. $m > 1$. Alors on a 3 racines distinctes :

$r_1 = 0$ et $r_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{m-1}$ (complexes conjuguées

Alors les solutions sont

$$c_1 + c_2 e^{t} \cos(\sqrt{m-1}\, t) + c_3 e^{t} \sin(\sqrt{m-1}\, t)$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

b1) Comme $m = -3 \in]-\infty, -1[- \{0\}$ on est dans le cas 1b). L'équation caractéristique a 3 solutions distinctes : $r_1 = 0$; $r_2 = -1$; $r_3 = 3$.
donc les solutions de (2) sont

$$c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{3t} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

b2) On cherche une solution particulière de (3) sous la forme $\tilde{y}(t) = a t^2 + b t + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ à trouver.

On a : $\tilde{y}' = 2at + b$; $\tilde{y}'' = 2a$; $\tilde{y}''' = 0$

En remplaçant en (3) on trouve

$$0 - 2 \cdot 2a - 3(2at + b) = 2t$$

ce qui mène au système

$$\begin{cases} -6a = 2 \\ -4a - 3b = 0 \end{cases}$$

On obtient $a = -\frac{1}{3}$; $b = \frac{4}{9}$

On peut prendre $c = 0$ donc une solution particulière serait $\tilde{y}(t) = -\frac{1}{3} t^2 + \frac{4}{9} t$

b) les solutions de (3) sont

$$-\frac{1}{3} t^2 + \frac{4}{9} t + c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{3t}$$

$$\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Exo 4.

a) $a(t) = 2t$; $b(x) = e^x$; $I = J = \mathbb{R}$

$M = \emptyset$: l'ensemble des racines de b

$$\frac{y'}{e^y} = 2t \iff \frac{d}{dt}\left(-e^{-y}\right) = \frac{d}{dt}(t^2)$$

$\iff -e^{-y} = t^2 - c$ avec $c \in \mathbb{R}$

$\iff e^{-y} = c - t^2$

$\iff y(t) = -\ln(c - t^2)$

$I_0 = ?$ Il faut avoir $c - t^2 > 0$

si $c \leq 0$ impossible $I_0 = \emptyset$

si $c > 0$ ~~on a~~ prendre $I_0 =]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[$

b) $y(0) = 0 \iff 0 = -\ln c \iff c = 1$

Alors la solution est

$y(t) = -\ln(1 - t^2)$ définie sur $I_0 =]-1, 1[$