Corrigé Partiel 1 OMJ Méca 3 2015 - 2016

Exo 1.

a) $([0,1], \gamma)$

avec

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$
$$t \to A + t(B-A)$$

donc $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 0 \\ 4+2t \end{pmatrix}$

b) $x^2+y^2-6x+8y=0 \iff$

$x^2-6x+9 + y^2+8y+16 = 25 \iff$

$(x-3)^2+(y+4)^2 = 5^2$

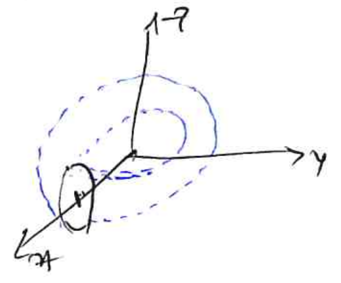
C'est le ~~cercl~~ cercle du centre $(3,-4)$ et rayon 5

Une param. c'est $([0,2\pi], \gamma)$

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to \begin{pmatrix} 3+5\cos t \\ -4+5\sin t \end{pmatrix}$$

Exo 2.

a) La courbe Γ est le cercle dans le plan $y=0$ de centre $(2,0)$ et rayon 1



b) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -(2+\cos t)\sin\theta \\ (2+\cos t)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = p$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\sin t\cos\theta \\ -\sin t\sin\theta \\ \cos t \end{pmatrix} = q$

$p \times q = \begin{pmatrix} (2+\cos t)\cos t\cos\theta \\ (2+\cos t)\cos t\sin\theta \\ (2+\cos t)\sin t \end{pmatrix} = (2+\cos t)\begin{pmatrix} \cos t\cos\theta \\ \cos t\sin\theta \\ \sin t \end{pmatrix}$

Alors

$$\|p\times q\| = (2+\cos t)\sqrt{\underbrace{\cos^2 t\cos^2\theta + \cos^2 t\sin^2\theta}_{=\cos^2 t} + \sin^2 t}$$

$$= 2+\cos t$$

(car $2+\cos t > 0 \quad \forall t\in[0,2\pi]$

On a $\|p\times q\| \neq 0 \quad \forall(\theta,t)\in\bar{D}$ donc tous les points de S sont réguliers.

$$\nu = \frac{p\times q}{\|p\times q\|} = \begin{pmatrix} \cos t\ \cos\theta \\ \cos t\ \sin\theta \\ \sin t \end{pmatrix}$$

c) $\int_S V(x)\,d\sigma = \iint_D V(\varphi(\theta,t))\,\|(p\times q)(\theta,t)\|\,d\theta\,dt$

Mais $V(\varphi(\theta,t)) = \varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2 = \|\varphi(\theta,t)\|^2 =$

$= (2+\cos t)^2\cos^2\theta + (2+\cos t)^2\sin^2\theta + \sin^2 t$

$= (2+\cos t)^2 + \sin^2 t = 4+4\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t$

$= 5+4\cos t.$

Alors

$\int_S V(x)\,d\sigma = \iint_D (5+4\cos t)(2+\cos t)\,dt =$

$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}(10+13\cos t+4\cos^2 t)\,dt\right]d\theta =$

$= 2\pi\int_0^{2\pi}(10+13\cos t+4\cos^2 t)\,dt =$

$= 2\pi\left[\underbrace{\int_0^{2\pi}10\,dt}_{=20\pi} + 13\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos t\,dt}_{=[\sin t]_0^{2\pi}=0} + 4\int_0^{2\pi}\underbrace{\cos^2 t}_{=\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt\right]$

$= 2\pi\left[20\pi + 2\underbrace{\int_0^{2\pi}1\,dt}_{=2\pi} + 2\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(2t)\,dt}_{=\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{2\pi}=0}\right]$

donc

$\int_S V(x)\,dx = \cancel{48\pi^2+}\ 48\pi^2$

d) $F(x,y,z) = \nabla V(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$

Alors

$$\int_\gamma F(x)\cdot dx = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\begin{pmatrix} 2+\cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} dt = -4\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin t\,dt}_{=[-\cos t]_0^{2\pi}=0}$$

donc

$\int_\gamma F(x)\cdot dx = 0$

On pouvait prévoir ce résultat car F provient d'un potentiel, ~~donc~~ V donc
$\int_\gamma F(x)\cdot dx = V(\gamma(2\pi)) - V(\gamma(0)) = 0$ par périodicité.
car $\gamma(0)=\gamma(2\pi)$

e) On résoud en t l'équation
~~Sont~~ $\sin t = \alpha$

Cas 1. ~~Si α (α) > 1~~ si $\alpha>1$ alors il n'y a aucune solution t, donc l'intersection est vide

Cas 2 Si $\alpha=1$ alors $\sin t = 1 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$\cos\frac{\pi}{2}=0$;

Alors l'intersection est le cercle $t\in[0,2\pi] \to \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 1\end{pmatrix}$ et rayon 2 du centre $(0,0,1)$ dans le plan $z=1$

~~c'est ok!~~

~~Cas 3 Si $\alpha=-1$ alors $\sin t=-1 \Leftrightarrow t=-\frac{\pi}{2}$~~
~~Alors c'est le cercle $t\in[0,2\pi] \to \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ -1\end{pmatrix}$ du centre $(0,0,1)$ rayon 2 dans le plan $z=-1$~~

Cas 3 si $\alpha\in[0,1[$ $\sin t=\alpha \Leftrightarrow$ $t=\arcsin\alpha$ ou $t=\pi-\arcsin\alpha$

$\cos(\arcsin\alpha)=\sqrt{1-\alpha^2}$ et $\cos(\pi-\arcsin\alpha) = -\sqrt{1-\alpha^2}$

L'intersect c'est l'union de 2 cercles : $\theta \to \begin{pmatrix} (2\pm\sqrt{1-\alpha^2})\cos\theta \\ (2\pm\sqrt{1-\alpha^2})\sin\theta \\ \alpha \end{pmatrix}$
de centres $(0,0,\alpha)$ et rayon $2\pm\sqrt{1-\alpha^2}$