Polytech Lyon, Mécanique 3 2015 - 2016

Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 1 (OMI 1)

Examen final, janvier 2016

Durée 2h - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.
Les ensembles F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels E sur $\mathbb{R}$ respectifs?
a) $E = \mathbb{R}^3 \qquad F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad \text{et} \quad 3x_1 - x_2 = 0\}$
b) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$)
$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f \text{ dérivable et } f'(0) + 3f(1) = 0\}$.
c) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \qquad F = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad f \text{ paire (c'est à dire } f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R})\}$.
d) $E = \mathbb{R}^2 \qquad F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_1 + x_2^2 = 0\}$

Exercice 2.
On considère la matrice suivante dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que A est diagonalisable et trouver deux matrices $P, D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
b) Montrer qu'il existe au moins une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$ et donner une telle matrice.

Exercice 3.
a) Trouver en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ toutes les solutions $y = y(t)$ de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 3

$$y^{(3)} - 2y'' + my' = 0. \tag{1}$$

b) On considère ici $m = -3$.
b1) Donner toutes les solutions de

$$y^{(3)} - 2y'' - 3y' = 0. \tag{2}$$

b2) Trouver une solution particulière de l'équation différentielle non homogène

$$y^{(3)} - 2y'' - 3y' = 2t \tag{3}$$

Indication: chercher une telle solution comme un polynome de degré inférieur ou égal à 2.
b3) Donner toutes les solutions de (3).

Exercice 4.
a) Donner toutes les solutions $y(t)$ (avec leur intervalle de définition) de l'équation

différentielle à variables séparées suivante:

$$y' = 2te^y, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

b) Trouver la solution de l'équation (4) satisfaisant la condition initiale

$$y(0) = 0.$$