Polytech Lyon, Mécanique 3, 2015-2016

Outils Mathématiques pour l'Ingénieur (OMI 1)

Partiel, novembre 2015

Durée 1h - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1. Pour chacune des courbes suivantes donner une paramétrisation C^1:
a) Le segment en $I\!R^3$ parcouru de $A = (1, 0, 4)$ à $B = (3, 0, 6)$.
b) Le cercle dans le plan $I\!R^2$ donné par

$$\{(x, y) \in I\!R^2, \quad x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0\}$$

et parcouru dans le sense trigonométrique.

Exercice 2. Dans un repère $(Oxyz)$ de l'espace $I\!R^3$ on considère la paramétrisation C^1 donnée par $([0, 2\pi],\ \gamma)$ avec

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 + \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

Nous notons par Γ la courbe associée à γ, c'est à dire $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$ (remarquer que Γ est dans la partie $x \geq 0$ du plan $y = 0$ de l'espace $I\!R^3$).
Nous notons par S la surface de révolution de la courbe Γ autour de l'axe vertical Oz (cette surface s'appelle **tore de révolution**; c'est un sorte de tube courbé refermé sur lui-même).
Nous construisons la nappe paramétrée de support S suivante: $(\overline{D}, \varphi)$ avec $D =]0, 2\pi[\ \times\ ]0, 2\pi[$ et $\varphi : \overline{D} \to I\!R^3$ donnée par

$$\varphi(\theta, t) = \begin{pmatrix} (2 + \cos t)\ \cos\theta \\ (2 + \cos t)\ \sin\theta \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \forall\ (\theta, t) \in \overline{D}.$$

On considère aussi une fonction à valeurs scalaires $V : I\!R^3 \to I\!R$ donnée par

$$V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \forall\ (x, y, z) \in I\!R^3$$

et le champ de vecteurs $F : I\!R^3 \to I\!R^3$ donné par $F = \nabla V$.
a) Quelle est la courbe Γ?
b) Trouver les points réguliers de φ et calculer, pour ces points réguliers, le vecteur normal ν.
c) Calculer l'intégrale de surface de V sur φ, c'est à dire calculer $\int_\varphi V(x)\, d\sigma$.
d) Calculer la circulation de F sur la courbe γ; pouvait-on prévoir ce résultat?
e) Pour tout réel positiv α (donc $\alpha \geq 0$) trouver l'intersection de la surface S avec le plan $z = \alpha$.