Corrigé Examen OMJ (2016-2017)

Exo 1.

a) C'est de la forme

$y' = a(t)\, b(y)$

avec $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a(t) = t$, donc $I = \mathbb{R}$

$b :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ $b(x) = \frac{1}{x+1}$, donc $J =]-1, \infty[$

b ne s'annule pas sur $]-1, \infty[$.

On divise par $b(y)$, donc

$\frac{y'}{b(y)} = a(t)$ donc

$(y+1)\, y' = t$. On intègre $\Rightarrow$

avec $c \in \mathbb{R}$

(1) $\frac{y^2}{2} + y = \frac{t^2}{2} + c$

donc

(1)' $y^2 + 2y - t^2 - 2c = 0$

le discriminant est $\Delta = 4 + 4(t^2 + 2c) = 4(t^2 + 2c + 1)$

On a 3 situations

Cas 1. $2c + 1 > 0$ c'est à dire $c > -\frac{1}{2}$

On a alors 2 solutions

$y_1(t) = \frac{-2 - 2\sqrt{t^2+2c+1}}{2} = -1 - \underbrace{\sqrt{t^2+2c+1}}_{\geq 0} \leq -1$

$y_2(t) = -1 + \underbrace{\sqrt{t^2+2c+1}}_{\geq 0}$

Comme on doit avoir $y(t) > -1$ on choisit y_2.

Donc

$y_0(t) = -1 + \sqrt{t^2+2c+1}$ définie ~~sur $\mathbb{R}$~~ pour $t \in \mathbb{R}$ donc $I_0 = \mathbb{R}$

Cas 2. $2c + 1 = 0$ c'est à dire $c = -\frac{1}{2}$

Alors ~~on choisit~~ $\sqrt{t^2+2c+1} = \sqrt{t^2} = |t|$

On choisit encor

$y(t) = -1 + |t|$ solution qui est défini

sur $I_0 =]-\infty, 0[$ ou $I_0 =]0, \infty[$.

(si on prend $I_0 = \mathbb{R}$ alors y n'est pas de classe C^1)

Cas 3. $2c+1 < 0$ c'est à dire $c < -\frac{1}{2}$

On écrit $\sqrt{t^2+2c+1} = \sqrt{t^2 - \underbrace{(-2c-1)}_{>0}}$

On a encore

$y(t) = -1 + \sqrt{t^2+2c+1}$

définie sur $I_0 =]-\infty, -\sqrt{-2c-1}[$ ou

$I_0 =]\sqrt{-2c-1}, +\infty[$.

b) On cherche c tel que $(1)'$ soit vraie pour $t=1$ et $y=3$. Alors

$3^2 + 2.3 - 1 - 2c = 0 \Leftrightarrow 2c = 14$ ce qui donne

$c = 7$.

On est dans le Cas 1.

$y(t) = -1 + \sqrt{t^2+15}$ définie $\forall t \in \mathbb{R}$

$I_0 = \mathbb{R}$.

Exo 2.

a) Le polynome caractéristique est

$P(z) = z^3 - 4z^2 + 3z$.

$P(z) = z(z^2 - 4z + 3) = z(z-1)(z-3)$

On a 3 racines simples 0, 1 et 3

Alors les solutions de (2) sont

$y(t) = c_1 . 1 + c_2 e^t + c_3 e^{3t}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

b) On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que si on pose $\tilde{y}(t) = at^2 + bt$ alors $\tilde{y}$ soit solution de (3)

On a :

$\tilde{y}' = 2at + b$

$\tilde{y}'' = 2a$

$\tilde{y}^{(3)} = 0$

Alors

$$0 - 4.(2a) + 3(2at+b) = 6t+1$$

donc $\qquad \forall t \in \mathbb{R}$

$$6at + 3b - 8a = 6t + 1$$

En identifiant on trouve

$$\begin{cases} 6a = 6 \\ 3b - 8a = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Donc $\tilde{y}(t) = t^2 + 3t$

Alors les solutions de (3) sont $\qquad \forall t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = t^2 + 3t + C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{3t} \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

c) On a : $\quad y'(t) = 2t + 3 + C_2 e^t + 3C_3 e^{3t}$

$\qquad\qquad y''(t) = 2 + C_2 e^t + 9C_3 e^{3t}.$

On va devoir résoudre le système avec inconnues C_1, C_2, C_3 :

$$\begin{array}{l} (i) \\ (ii) \\ (iii) \end{array} \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_2 + 3C_3 = -3 \\ 2 + C_2 + 9C_3 = 1 \quad \text{donc} \quad C_2 + 9C_3 = -1 \end{cases}$$

On trouve facilement : $C_3 = \frac{1}{3}$; $C_2 = -4$

$C_1 = \frac{11}{3}$

Donc $\quad y(t) = t^2 + 3t + \frac{11}{3} - 4e^t + \frac{1}{3} e^{3t}$

Exo 3.

a) $$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-m & m-2 & m-\lambda \end{pmatrix}$$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

On multiplie la colonne 3 par $\lambda-1$ et on ajoute à la colonne 1. Alors

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \lambda-2 & 2-\lambda & 1 \\ (m-\lambda)(\lambda-1)+2-2m & m-2 & m-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \lambda-2 & 2-\lambda & 1 \\ -\lambda^2+(m+1)\lambda+2-2m & m-2 & m-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 2-\lambda \\ -\lambda^2+(m+1)\lambda+2-2m & m-2 \end{pmatrix}$$ (on a developpé selon la ligne 1)

$$= (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\lambda^2+(m+1)\lambda+2-2m & m-2 \end{pmatrix}$$

donc $P_A(\lambda) = (2-\lambda)\left(\lambda^2-(m+1)\lambda+m\right)$

b) On cherche les racines de $\lambda^2-(m+1)\lambda+m$

$\Delta = (m+1)^2-4m = m^2+2m+1-4m = (m-1)^2 \geq 0$

les racines sont réelles :

$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(m+1+m-1\right) = m$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(m+1-m+1\right) = 1$

On a donc

$P_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-m)$

Cas 1. Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$ (donc $m \in R - \{1, 2\}$)

alors les 3 racines réelles de P_A sont distinctes. Alors A est diagonalisable en R (en suivant la théorie du cours)

Cas 2. Si $m = 1$ $\quad s = 2$

Alors $P_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

~~Il faut~~ ~~$\lambda = 1$ est racine~~ $\mu_1 = 1 \; ; \; m_1 = 2$

$\mu_2 = 2 \; : \; m_1 = 1$

$\mu_1 = 1$ est racine double : On doit trouver $k_1 = \cancel{\dim(\ker(A - I_3))}$ $\dim(A_1)$ avec $A_1 = A - I_3$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det M \neq 0$

donc $\text{rang}(A_1) = 2$

$\dim(A_1) = 3 - 2 = 1$

donc A n'est pas diagonalisable

Cas 3. Si $m = 2$

Alors $P_A(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$

$\mu_1 = 1 \; ; \; m_1 = 1$

$\mu_2 = 2 \; ; \; m_2 = 2.$

$\mu_2 = 2$ est racine double. On doit trouver $k_2 = \dim(A_2)$ avec $A_2 = A - 2I_3$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rang}(A_2) = 1$

$k_2 = 3 - 1 = 2$

A est diagonalisable

Donc A est diagonalisable ssi $m \in \mathbb{R} - \{1\}$.

c) Il faut ecrire $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ $\quad P, D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

avec P inversible , D diagonale

Dans le cas $m = 2$ $\quad A_1 = A - I_3$ donc

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prendre $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A)$

$$A_2 = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prendo P_2, P_3 indépendants dans $\ker(A_2)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \det P = -1 \; ; \; \mathrm{Cof}(P) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Alors $A^k = P D^k P^{-1}$ donc

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2^k & 0 \\ 1 & 0 & 2^k \\ 0 & 2^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1-2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Donc $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1-2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$