Corrigé Partiel 1 OMJ ~~[illegible]~~ 2016-2017

Exo 1.

L'équation est équivalente à

$$\underbrace{x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}\cdot x + \frac{9}{4}}_{=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2} + \underbrace{y^2 + 2\cdot 2\cdot y + 4}_{(y+2)^2} = \frac{9}{4} + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Donc c'est le cercle de centre $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ et rayon $\frac{5}{2}$

Paramétrisation

$([0, 2\pi], \gamma)$ avec $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cos t \\ -2 + \frac{5}{2}\sin t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Exo 2.

a) En reprenant les calculs de cours ~~[illegible]~~ on a ~~ce qui~~ ~~on obtient~~

$\cancel{p = \frac{\partial\gamma}{\partial\theta}(\theta,\varphi)}$; $p = p(\theta, \varphi) = \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}(\theta, \varphi)$

$q = q(\theta, \varphi) = \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi)$

ce qui donne

$p \times q = \cos\varphi \cdot \gamma(\theta, \varphi)$

Comme $|\gamma(\theta,\varphi)| = 1$ alors le vecteur $\gamma(\theta,\varphi)$ est $\neq 0$.

Alors $p \times q = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0$ impossible car $\varphi \in [0, \varphi_0]$ et $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$.

$$\nu = \frac{p\times q}{\|p \times q\|} = \gamma(\theta, \varphi) \quad \text{car } \|p\times q\| = \cos\varphi.$$

b) $\text{Aire}(\Sigma) = \int_{\gamma} 1 \, d\sigma = \iint_U 1 \cdot \|(p\times q)(\theta,\varphi)\| \, d\theta \, d\varphi$

$= \iint_U \cos\varphi \, d\theta \, d\varphi$ avec $U =]0, 2\pi[\times]0, \varphi_0[$

On applique le Théorème de Fubini, ce qui donne

$$\text{Aire}(\Sigma) = \int_0^{\varphi_0} \Big(\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\theta}_{=2\pi\cos\varphi}\Big) d\varphi = 2\pi \int_0^{\varphi_0} \underbrace{\cos\varphi \, d\varphi}_{=(\sin\varphi)'}$$

$$= 2\pi \left[\sin\varphi\right]_0^{\varphi_0} = 2\pi \sin\varphi_0$$

c) $\iint_{\gamma} F(x)\cdot d\sigma = \iint_U F(\gamma(\theta,\varphi))\cdot\cos\varphi \, d\theta d\varphi$

$= \iint_U \left(\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin\varphi\right)\cdot\cos\varphi \, d\theta d\varphi = E_1 + E_2$

avec

$E_1 = \iint_U \cos^3\varphi\cos^2\theta \, d\theta d\varphi$ et

$E_2 = \iint_U \sin\varphi\cos\varphi \, d\theta d\varphi$.

On a: $E_2 = \int_0^{\varphi_0}\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi \, d\theta d\varphi = \frac{2\pi}{2}\int_0^{\varphi_0} \underbrace{\sin(2\varphi)}_{=-\left(\frac{\cos(2\varphi)}{2}\right)'} d\varphi$

$= -\frac{\pi}{2}\left[\cos(2\varphi)\right]_0^{\varphi_0} = \frac{\pi}{2}\left[1-\cos(2\varphi_0)\right]$

$E_1 = \int_0^{\varphi_0}\int_0^{2\pi} \cos^3\varphi\cos^2\theta \, d\theta d\varphi = \int_0^{\varphi_0}\cos^3\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{2\pi}\cos^2\theta \, d\theta$

On a:

$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(2\theta)}_{=\left(\frac{\sin(2\theta)}{2}\right)'} d\theta$

$= \pi + \frac{1}{4}\underbrace{\left[\sin(2\theta)\right]_0^{2\pi}}_{=0} = \pi.$

$\int_0^{\varphi_0}\cos^3\varphi \, d\varphi = \int_0^{\varphi_0}(1-\sin^2\varphi)(\sin\varphi)' d\varphi \underset{=}{\text{faire } y=\sin\varphi}$

$= \int_0^{\sin(\varphi_0)}(1-y^2)dy = \sin(\varphi_0) - \frac{1}{3}\sin^3(\varphi_0)$

Alors

$E_1 = \pi\left[\sin(\varphi_0) - \frac{1}{3}\sin^3(\varphi_0)\right]$

Donc

$\int_{\gamma} F(x)\cdot d\sigma = \frac{\pi}{2}\left[1-\cos(2\varphi_0)\right] + \pi\left[\sin(\varphi_0) - \frac{1}{3}\sin^3(\varphi_0)\right]$

d) $g(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0\cos\theta \\ \cos\varphi_0\sin\theta \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix}$

Méth 1. Comme $F = \nabla V$ on a

$\int_g F(x)\cdot dx = V(g(\pi)) - V(g(0)) = V\begin{pmatrix} -\cos\varphi_0 \\ 0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix} - V\begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ 0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix}$

$= (\cos^2\varphi_0 + \sin\varphi_0) - (\cos^2\varphi_0 + \sin\varphi_0) = 0$

Méth 2. Par définition

$$\int_g F(x)\cdot dx = \int_0^{\pi} F(g(\theta))\cdot g'(\theta)\,d\theta$$

avec $F(x) = \nabla V(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\int_g F(x)\cdot dx = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} 2\cos\varphi_0 \cos\theta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos\varphi_0 \sin\theta \\ \cos\varphi_0 \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta =$$

$$-2\cos^2\varphi_0 \int_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = -\cos^2\varphi_0 \int_0^{\pi} \sin(2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{\cos^2\varphi_0}{2} \left[\cos(2\theta)\right]_0^{\pi} = 0.$$

c) On cherche (φ, θ) t.q. $\begin{cases} \cancel{\cos\varphi}\cos\theta = \cancel{\cos\varphi}\sin\theta & \neq 0. \\ \underbrace{\cos\varphi}_{>0}\cos\theta \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \sin\theta \\ \cos\theta \geq 0 \end{cases}$ Ceci donne $\theta = \frac{\pi}{4}$

C'est la courbe $\theta = \frac{\pi}{4}$ sur Σ

Paramétrisation : $([0, \varphi_0], f)$

$f : [0, \varphi_0] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\varphi \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \forall \varphi \in [0, \varphi_0]$$

car $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exo 3.

a) ϕ est une primitive de la fonction continue $\tau \longrightarrow \|\gamma'(\tau)\|$ (car la fonct $x \to \|x\|$ est continue) donc ϕ est de classe C^1

$\phi'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ si $t \in [a, b]$, ~~car γ régulière~~ strictement croissante, donc injective sur $[a, b]$.

b) ϕ est strictement croissante ~~sur [a, b]~~

Pour la bijectivité il suffit d'avoir $\phi(a) = 0$ et $\phi(b) = L$; ce qui est évident.

c) On a $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ | $\gamma \in C^1$ et $\phi^{-1} \in C^1 \Rightarrow$
$\theta : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ | $\theta = \gamma \circ \phi^{-1} \in C^1$.
$\phi : [a,b] \longrightarrow [0,L]$ bijective, C^1 et $\phi'(t) > 0 \quad \forall t \in [a,b]$

On a aussi $\cancel{\theta = \gamma \circ \phi}$ $\gamma = \theta \circ \phi$
(car $\theta = \gamma \circ \phi^{-1}$)
Ceci montre que γ et θ sont équivalentes.

~~d) On pose ici $\phi : [0,$~~
On peut deduire l'equivalence entre θ et γ en utilisant $\theta = \gamma \circ \phi^{-1}$ et en observant que ϕ^{-1} est ~~de classe~~ bijective, de classe C^1 et $(\phi^{-1})'(s) > 0 \quad \forall s \in [0,L]$ car

$$(\phi^{-1})'(s) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(s))} > 0 \quad \forall s \in [0,L]$$

car $\phi' > 0$ sur $[a,b]$.

d) On a

$$\theta'(s) = \gamma'(\phi^{-1}(s)) \cdot (\phi^{-1})'(s) = \frac{\gamma'(\phi^{-1}(s))}{\phi'(\phi^{-1}(s))} =$$

$$= \frac{\gamma'(\phi^{-1}(s))}{\|\gamma'(\phi^{-1}(s))\|}. \quad \text{Alors } \|\phi'(s)\| = \frac{\|\gamma'(\phi^{-1}(s))\|}{\|\gamma'(\phi^{-1}(s))\|} = 1$$