Polytech Lyon, Mécanique 3 2016 - 2017

Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 1 (OMI 1)

Examen final, janvier 2017

Durée 2h - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.
a) Donner toutes les solutions $y(t)$ (avec leur intervalle de définition) de l'équation différentielle à variables séparées suivante:

$$y' = \frac{t}{y+1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y > -1. \tag{1}$$

b) Trouver la solution de l'équation (1) satisfaisant la condition initiale

$$y(1) = 3.$$

Exercice 2.
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 3:

$$y^{(3)} - 4y'' + 3y' = 0. \tag{2}$$

a) Donner toutes les solutions de (2).
b) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle non-homogène

$$y^{(3)} - 4y'' + 3y' = 6t + 1. \tag{3}$$

Indication: chercher une solution particulière de (3) *comme un polynome de degré inférieur ou égal à 2, de la forme* $\tilde{y}(t) = at^2 + bt$, *avec* $a,\ b \in \mathbb{R}$ *des coefficients à trouver.*
c) Trouver la solution de (3) satisfaisant en plus les conditions initiales:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

Exercice 3.
On considère la matrice suivante dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

avec $m \in \mathbb{R}$ un paramètre.
a) Montrer que le polynôme caractéristique de A est donné par

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)[\lambda^2 - (m+1)\lambda + m], \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

b) Trouver les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ tels que la matrice A soit diagonalisable en $\mathbb{R}$.
c) On suppose ici $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.