Polytech Lyon, Mécanique 3, 2016-2017

Outils Mathématiques pour l'Ingénieur (OMI 1)

Partiel, novembre 2016

Durée 1h15 - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée
Les 3 exercices sont indépendants

Exercice 1.
Donner une paramétrisation de classe C^1 pour le cercle dans le plan $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0\}$$

et parcouru dans le sense trigonométrique.

Exercice 2.
Considérons la spère $S(0,1)$ en $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^3, \quad \|x\| = 1\}$$

et rappelons la paramétrisation usuelle $(\overline{D}, \gamma^0)$ de $S(0,1)$ avec

$$D =]0, 2\pi[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \text{et} \qquad \gamma^0(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \forall\ (\theta, \varphi) \in \overline{D}.$$

Nous rappelons que à tout point $x \in S(0,1)$ on associe $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (latitude de x) et $\theta \in [0, 2\pi]$ (longitude de x).
Soit $\varphi_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donné et définissons l'ensemble

$$\Sigma = \{x \in S(0,1), \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0\}.$$

On dira que Σ est une **couronne sphérique**; c'est l'ensemble de points de $S(0,1)$ avec latitude comprise entre 0 et φ_0.
Il est facile de voir que la nappe paramétrée $(\overline{U}, \gamma)$ est une paramétrisation de Σ, où $U =]0, 2\pi[\times]0, \varphi_0[$ et γ est la restriction de γ^0 sur $\overline{U}$.
On considère aussi une fonction à valeurs scalaires $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$V(x) = x_1^2 + x_3, \quad \forall\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

et le champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par $F = \nabla V$.
a) Montrer que la paramétrisation $(\overline{U}, \gamma)$ est régulière et calculer le vecteur normal ν.
b) Calculer l'aire de la surface Σ.
c) Calculer l'intégrale de surface de V sur γ (c'est à dire calculer $\int_\gamma V(x)\, d\sigma$).
Indication: pour calculer $\int \cos^3 y\, dy$ *on peut faire un changement des variables, en observant que* $\cos y = (\sin y)'$ *et* $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$.
d) Considérons l'arc paramétré de classe C^1 en $\mathbb{R}^3$ donné par $([0, \pi],\ g)$ avec $g : [0,\ \pi] \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(\theta) = \gamma(\theta, \varphi_0),\ \forall\ \theta \in [0,\ \pi]$
(on remarque que la courbe support de g est un demi-cercle qui fait partie de la frontière

de Σ).
Calculer par deux méthodes différentes la circulation de F sur l'arc paramétré g.
e) Montrer que l'intersection entre la surface Σ et le demi-plan $\{x_1 = x_2,\ x_1 \geq 0\}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ est une courbe en $\mathbb{R}^3$; donner une paramétrisation de classe C^1 de cette courbe.

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$, $([a,b],\gamma)$ une paramétrisation de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$ et notons $\Gamma = \gamma([a,b])$ le support de γ. On suppose que $\gamma'(t) \neq 0,\ \forall\, t \in [a,b]$ (donc la paramétrisation $([a,b],\gamma)$ est régulière).
Soit L la longueur de γ, c'est à dire $L = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt > 0$.
On considère l'application $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\phi(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau, \quad \forall\, t \in [a,b]$$

($\phi(t)$ représente la longueur de la portion de la courbe Γ comprise entre $\gamma(a)$ et $\gamma(t)$; le nombre réel $\phi(t)$ s'appelle **coordonnée courviligne** sur Γ).
a) Montrer que ϕ est de classe C^1 et que $\phi'(t) > 0,\ \forall\, t \in [a,b]$.
b) Montrer que ϕ est une bijection de $[a,b]$ à $[0,L]$.

c) On notera alors par ϕ^{-1} la reciproque de ϕ, avec $\phi^{-1} : [0,L] \to [a,b]$.
On introduit la fonction $\theta : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\theta(s) = \gamma(\phi^{-1}(s)), \quad \forall\, s \in [0,L].$$

Montrer que θ est de classe C^1 et que les paramétrisations $([a,b],\gamma)$ et $([0,L],\theta)$ sont équivalentes.
(On dira alors que θ est une **paramétrisation par coordonnées courvilignes** de Γ).
d) Montrer que $\|\theta'(s)\| = 1, \quad \forall\, s \in [0,L]$.