Corrigé Exam 2015 OMJ - Méca 3

Exo 1.

a) C'est du type $y' = a(t)\, b(y)$

avec $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a(t) = 3t^2$

$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$b(x) = x^2 - 3x + 2$

On pose (les racines de b)

$M = \{x \in \mathbb{R} : b(x) = 0\}$ donc $M = \{1, 2\}$

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

Donc on a 2 solutions constantes de (1) :

$y(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

ou

$y(t) = 2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Pour trouver les autres solution on divise (1) par $y^2 - 3y + 2$ (on suppose $y \neq 1$ et $y \neq 2$)

$$(1)' \quad \frac{y'}{(y-1)(y-2)} = 3t^2$$

On cherche $B(x) = \displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\, dx$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

~~faire~~ multiplier par $x-1$ et faire $x \to 1$ $\Rightarrow a = -1$

multiplier par $x-2$ et faire $x \to 2$ $\Rightarrow b = 1$

Alors $$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

Ceci donne (une primitive de $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$)

$$B(x) = \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$$

On deduit de (1)' avec $C \in \mathbb{R}$ constante

$$\log\left|\frac{y(t)-2}{y(t)-1}\right| = t^3 + C$$

(car une primitive de $3t^2$ est t^3)

Ceci donne

$$\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = e^C \cdot e^{t^3}$$

ce qui donne

$$\frac{y-2}{y-1} = \pm e^{c} e^{t^3}$$

Pour commodité on note $c_1 = \pm e^{c}$, $c_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$

donc

$$\frac{y-2}{y-1} = c_1 e^{t^3} \quad \text{avec } c_1 \neq 0$$

$$y-2 = c_1 e^{t^3}(y-1) \quad \text{donc}$$

Alors $y - 2 = c_1 e^{t^3}$ ~~et~~ ce qui donne

$$y(1 - c_1 e^{t^3}) = 2 - c_1 e^{t^3}$$

$$y(t) = \frac{2 - c_1 e^{t^3}}{1 - c_1 e^{t^3}}$$

Pour voir les intervalles de définition I_0 possible pour $y(t)$ il faut resoudre en t l'équation

~~on disting~~

(2)' $1 - c_1 e^{t^3} = 0$ ~~$e^{t^3} = \frac{1}{c_1}$~~

~~Comme $c_1 \neq 0$ on a~~

On distingue 2 cas :

Cas 1. Si $c_1 < 0$ alors (2)' n'a pas de solution

Cas 2. Si $c_1 > 0$ alors (2)' a une seule solution

$e^{t^3} = \frac{1}{c_1}$ donc $t^3 = -\log c_1$ donc $t = -\sqrt[3]{\log c_1}$

On a alors les solutions

i) Si $c_1 < 0$

$$y(t) = \frac{2 - c_1 e^{t^3}}{1 - c_1 e^{t^3}} \quad \text{définie sur } I_0 = \mathbb{R}$$

. Si $c_1 > 0$

ii) $y(t) = \dfrac{2 - c_1 e^{t^3}}{1 - c_1 e^{t^3}}$ définie sur $I_0 =]-\sqrt[3]{\ln c_1}, +\infty[$

ou

iii) $y(t) = \dfrac{2 - c_1 e^{t^3}}{1 - c_1 e^{t^3}}$ définie sur $I_0 =]-\infty, -\sqrt[3]{\ln c_1}[$

Il faut aussi rajouter les solutions constantes

iv) $y = 1$

ou

v) $y = 2$

b) La solution constante

$y(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

est solution de (1) et satisfait la condition initiale demandée.

c) Il faut chercher $c_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ tel que

$$\frac{2 - c_1 e}{1 - c_1 e} = -2 \iff$$

ceci donne : $\quad 2 - c_1 e = -2 + 2c_1 e$

$3e c_1 = 4 \quad$ donc $\quad c_1 = \frac{4}{3e} > 0$

Calculer $s_0 = -\sqrt[3]{\ln c_1} = -\sqrt[3]{\ln\left(\frac{4}{3e}\right)} = \sqrt[3]{-\ln\left(\frac{4}{3e}\right)} =$

$= \sqrt[3]{\ln\left(\frac{3e}{4}\right)}$

(car $e > 2$)

Comme $1 < \frac{3e}{4} < e$ alors $0 < \ln\left(\frac{3e}{4}\right) < 1$ donc $0 < s_0 < 1$

La solution est alors

$$y(t) = \frac{2 - \frac{4}{3e} e^{t^3}}{1 - \frac{4}{3e} e^{t^3}}$$

donc

$$y(t) = \frac{6e - 4e^{t^3}}{3e - 4e^{t^3}}$$

définie sur $\mathring{I}_0 = \left] \sqrt[3]{\ln\left(\frac{3e}{4}\right)}, +\infty \right[$.

Exo 2.

a) L'equation caractéristique est

$\lambda^3 - 4\lambda = 0$

le solutions sont : $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = -2$

chacune de multiplicité $= 1$.

Un base B dans l'espace vectoriel des solutions sera alors $\{e^{0.t}, e^{2t}, e^{-2t}\}$ donc

$B = \{e^{0.t}, e^{2t}, e^{-2t}\}$

$B = \{1, e^{2t}, e^{-2t}\}$

Alors les solutions de (2) sont

$y(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$, $\quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

b) On cherche une solution particulière de (3) sous la forme

$\tilde{y}(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ à trouver

$\tilde{y}' = 3at^2 + 2bt + c$

$\tilde{y}'' = 6at + 2b$

$\tilde{y}''' = 6a$

On remplace en (3) :

$6a - 4(3at^2 + 2bt + c) = 2t^2 + 4$ ceci $\forall t \in \mathbb{R}$

Par identification ceci donne

$$\begin{cases} -12a = 2 \\ -8b = 0 \\ 6a - 4c = 4 \end{cases}$$ ce qui donne $$\begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = 0 \\ c = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Donc une solution particulière de (3) est (prendre $d = 0$)

$\tilde{y}(t) = -\frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{4}t$

c) Une solution arbitraire de (3) est

$y(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t} - \frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{4}t$

On a :

$y'(t) = 2c_2 e^{2t} - 2c_3 e^{-2t} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{4}$

$y''(t) = 4c_2 e^{2t} + 4c_3 e^{-2t} - t$

On aura alors à résoudre le système avec inconnues c_1, c_2, c_3 :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_2 - 2c_3 = \frac{5}{4} \\ 4c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases}$$

(la 2-ème $\times 2 +$ la 3-ème $\Rightarrow$) $8c_2 = \frac{5}{2}$ donc $c_2 = \frac{5}{16}$

Ensuite $c_3 = -\frac{5}{16}$ et $c_1 = 0$

Donc $c_1 = 0$; $c_2 = +\frac{5}{16}$, $c_3 = -\frac{5}{16}$

Ceci donne $y(t) = +\frac{5}{16}e^{2t} - \frac{5}{16}e^{-2t} - \frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{4}t.$

Exo 3.

a) Il s'agit du cercle centré en $(0,0)$ et de rayon $= 3$ et parcouru au sense trigonométrique

b) $\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = \int_0^{\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$

$$= \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} 3\cos(2t) - 3\sin(2t) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6\sin(2t) \\ 6\cos(2t) \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[-18\sin(2t)\cos(2t) + 18\sin^2(2t) + 6\cos(2t) \right] dt$$

On a :

$$-\int_0^{\pi} 18\sin(2t)\cos(2t)\, dt = -\int_0^{\pi} 9\sin(4t) = \frac{9}{4}\left[\cos(4t)\right]_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} 6\cos(2t)\, dt = 3\left[\sin(2t)\right]_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} 18\sin^2(2t)\, dt = \int_0^{\pi} 18\, \frac{1-\cos(4\pi)}{2}\, dt = \underbrace{\int_0^{\pi} 9\, dt}_{=9\pi} - \underbrace{9\int_0^{\pi} \cos(4\pi)\, dt}_{=0}$$

Donc

$$\oint_{\gamma} F(x) \cdot dx = 9\pi$$