Partiel nov. 2014

OMI 1 Méca 3, 2014-2015

Exo 1.

a) $\varphi(x) = Ax$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Alors $\varphi(\lambda x + \mu y) = A(\lambda x + \mu y) = \lambda A x + \mu A y = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)$
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$: donc φ linéaire

b) $\begin{cases} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = \gamma \\ 3\alpha = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$; Donc u_1, u_2, u_3 ~~indep~~ famille libre;
Alors c'est une base.

c) $A_1 = A$

d) $B_{e_3} = \{ e_{3,1}, e_{3,2}, e_{3,3} \}$

$Au_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_{3,1} + e_{3,2} + e_{3,3}$

$Au_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 e_{3,1} + 0 e_{3,2} - 2 e_{3,3}$

$Au_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 e_{3,1} + 2 e_{3,2} - 2 e_{3,3}$

Alors $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

e) $Au_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$ (observer!)

$Au_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 u_2 = 0 \cdot u_1 - 2 u_2 + 0 u_3$

$Au_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 u_3 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 - 2 \cdot u_3$

Alors $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Exo 2.

a) $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & \alpha \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) On a la sous-matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ inversible

$\left(\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -2 + 4 = 2 \neq 0 \right)$

Alors le rang de A est au moins 2.

On a alors

$\text{rang}(A) = 2$ ssi $\det(A) = 0$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & \alpha \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 2\alpha - 2(6-4)$$

$$= 2 - 2\alpha = 2(1-\alpha)$$

$\det(A) = 0 \iff 2 - 2\alpha = 0 \iff \alpha = 1$

Donc $\text{rang}(A) = 2$ ssi $\alpha = 1$

On utilise le critère vu en cours pour voir si le système admet des solutions

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (on a rajouté à la sous-matrice principale S la 3-ème ligne et la colonne b)

$$\det(B) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 2 - 2(-4)$$
$$= -6 + 8 = 2 \neq 0$$

Donc le système n'a pas des solutions pour $\alpha = 1$.

c) Si $\alpha \neq 1$ alors $\text{rang}(A) = 3$ car $\det(A) \neq 0$,
Alors c'est un système de Cramer
On peut trouver la solutions par la règle de Cramer.
On pose

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & \alpha \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \; ; \; \det(A_1) = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$= -2 + 2(-2\alpha + 4) = -4\alpha + 6$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \; ; \; \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2\alpha + 8$$

$$= 5 - 2\alpha$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; \det(A_3) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 8 = 2$$

Alors $x_1 = \dfrac{3 - 2\alpha}{1 - \alpha}$; $x_2 = \dfrac{5 - 2\alpha}{2(1-\alpha)}$; $x_3 = \dfrac{1}{1-\alpha}$

<u>Exo 3.</u>

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & a & b \\ 0 & 1-\lambda & c \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

les val. propres de A sont
$\lambda_1 = 1$ de multiplicité $m_1 = 2$
$\lambda_2 = 2$ de multiplicité $m_2 = 1$

La condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable en $\mathbb{R}$ est

$\dim(E_1) = 2$
et
$\dim(E_2) = 1$

avec $E_1 = \text{Ker}(A - \lambda_1 I_3) = \text{Ker}(A - I_3)$
$E_2 = \text{Ker}(A - \lambda_2 I_3) = \text{Ker}(A - 2I_3)$

On a :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang de $A - I_3$ ~~de~~ doit être $= 1$

Ceci est vrai $\Leftrightarrow a = 0$ (facile à voir)

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de $A - 2I_3$ doit être $= 2$

Ceci est vrai pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ / $\det\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

Donc la condition nécessaire et suffisante est

$a = 0$

(c'est indépendent de b et c).

Supposons maintenant $a = 0$.

Il faut trouver deux vecteurs indépendants dans

$E_1 = \ker(A - I_3)$

donc $\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + bx_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + cx_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_3 = 0$

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

Il faut trouver un vecteur $\neq 0$ dans $E_2 = \ker(A - 2I_3)$

donc $\begin{cases} -x_1 + 0x_2 + bx_3 = 0 \\ 0 - x_2 + cx_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = bx_3 \\ x_2 = cx_3 \end{cases}$

Prendre $P_3 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ inversible ; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonale

$A = PDP^{-1}$