Corrigé examen OMJ 1 2013-2014

Exr 1.

a) C'est du type $y' = a(t)\,b(y)$

avec $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad a(t) \equiv 1$

$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad b(x) = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$

$M = \{x \in \mathbb{R} ;\ b(x) = 0\}$ donc $M = \{0, 1, 2\}$

En supposant $y(t) \notin M$ on a

$(*1)$ $\dfrac{y'}{b(y)} = 1$

On calcule $B(x) = \int \dfrac{dx}{b(x)}$ (primitive de $\frac{1}{b}$) définie sur $\mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$

$\dfrac{1}{b(x)} = \dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}$ on décompose en fractions simples

$\dfrac{1}{b(x)} = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x-1} + \dfrac{\gamma}{x+1}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ à trouver.

En multipliant par x et ensuite $x \to 0$ on trouve $\alpha = -1$

De même on trouve $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$

Alors $\dfrac{1}{b(x)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{1}{2(x+1)}$ ce qui donne

~~D'autre part $A(t) = \int a(t)dt = \int 1\, dt = t$~~

~~De (*1) on déduit~~

$B(x) = -\log|x| + \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1|$

On peut écrire

$B(x) = \frac{1}{2}\Big(\log|x^2-1| - \underbrace{2\log|x|}_{=\log(x^2)}\Big)$ donc

$B(x) = \frac{1}{2}\log\left(\left|\dfrac{x^2-1}{x^2}\right|\right)$ fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$.

D'autre part on pose

$A(t) = \int a(t)dt = \int 1\, dt = t$ alors

On déduit de $(*1)$ que si $y(t) \notin M$ alors

$\frac{1}{2}\log\left(\left|\dfrac{y^2-1}{y^2}\right|\right) = t + c$

avec $c \in \mathbb{R}$ une constante

Ceci donne

$\log\left(\left|\frac{y^2-1}{y^2}\right|\right) = 2(t+c)$ donc

$\left|\frac{y^2-1}{y^2}\right| = e^{2c}.e^{2t}$; On pose $k = e^{2c} > 0$ nouvelle constante

donc

$\left|\frac{y^2-1}{y^2}\right| = k e^{2t}$

On déduit 2 possibilités :

$\frac{y^2-1}{y^2} = k e^{2t}$ ou $\frac{y^2-1}{y^2} = -k e^{2t}$.

Cas 1.

$\frac{y^2-1}{y^2} = k e^{2t}$;

Ceci donne $y^2 - 1 = k e^{2t} y^2 \iff y^2(\underbrace{1-ke^{2t}}_{>0}) = 1$

On obtient 2 solutions

$y_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1-ke^{2t}}}$ ou $y_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-ke^{2t}}}$

chacune définie là où $1-ke^{2t} > 0 \iff e^{2t} < \frac{1}{k}$

$k > 0$ arbitraire

donc $I = \left]-\infty, \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{k}\right)\right[$

Cas 3.

$\frac{y^2-1}{y^2} = -k e^{2t}$

Ceci donne $y^2 - 1 = -k e^{2t} y^2 \iff y^2(1+ke^{2t}) = 1$

On a toujours $1 + ke^{2t} > 0$ car $k > 0$

On a donc encore 2 solutions

$y_3(t) = \frac{1}{\sqrt{1+ke^{2t}}}$ et $y_4(t) = -\frac{1}{\sqrt{1+ke^{2t}}}$

définies sur $\mathbb{R}$.

Il faut ajouter encore 3 solutions constantes définies sur $\mathbb{R}$

$y_5 \equiv 0$; $y_6 \equiv 1$; $y_7 \equiv -1$

b) Comme $1/5 \neq 0$; $1/5 \neq 1$, $1/5 \neq -1$ et $1/5 > 0$
la solution recherchée ne peut être que du type y_1 ou du type y_3.

Essayons y_1 : il faut $\dfrac{1}{\sqrt{1-ke^2}} = \dfrac{1}{5} \iff 1-ke^2 = 25$

$\iff ke^2 = -24 < 0$ impossible car $k > 0$

Essayons y_3 : il faut $\dfrac{1}{\sqrt{1+ke^2}} = \dfrac{1}{5} \iff 1+ke^2 = 25$

$\iff ke^2 = 24.$; ça marche avec $k = \dfrac{24}{e^2} = 24e^{-2}$

Alors la solution recherchée est

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+24e^{2(t-1)}}}$$

c) La solution recherchée c'est y_7 donc $y \equiv -1$

Exercice 2.

a) $\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 6 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ developpes 2-ème ligne

$= (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\left[(\lambda-4)(\lambda+1)+6\right]$ donc

$\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)\underbrace{(\lambda^2-3\lambda+2)}_{=(\lambda-2)(\lambda-1)} = -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$

les valeurs propres sont

$\lambda_1 = 1$ multiplicité algebrique 1

$\lambda_2 = 2$ multipl $= 2$.

Vecteurs propres pour λ_1 :

$A - I = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Trouver (x_1, x_2, x_3) t.q $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

on peut prendre $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Pour λ_2.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \operatorname{rang}(A-2I) = \cancel{4} \quad \text{donc}$$

l'espace vect propre de $A-2I$ est de dimension 2

Il suffit de resoudre $2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$

prendre $x_2 = 1$ et $x_3 = 0 \implies x_1 = 2$

$x_2 = 0$ et $x_3 = 1 \implies x_1 = -1$

On peut choisir

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P_1, P_2, P_3 forment une base de vect. propres de A en $\mathbb{R}^3$

Donc A est diagonalisable

$$A = P \cdot D\, P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) les solutions sont

$$x(t) = c_1 e^{t} P_1 + c_2 e^{2t} P_2 + c_3 e^{2t} P_3 \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 2e^{t} \\ 0 \\ -3e^{t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

c) On cherche $\tilde{y}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 t + \beta_1 \\ 0 \\ \alpha_3 t + \beta_3 \end{pmatrix}$; on remplace en (3) :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 t + \beta_1 \\ 0 \\ \alpha_3 t + \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+t \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 = 4(\alpha_1 t + \beta_1) + 2(\alpha_3 t + \beta_3) \\ 0 = 0 \\ \alpha_3 = -3(\alpha_1 t + \beta_1) - (\alpha_3 t + \beta_3) + 1 + t \end{cases}$$

Par identification, ceci donne

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\alpha_3 + 0 = 0 \\ -3\alpha_1 - \alpha_3 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow -2\alpha_1 + 2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_3 = -2$$

et

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 = 4\beta_1 + 2\beta_3 \\ \underset{-2}{\overset{\shortparallel}{\alpha_3}} = -3\beta_1 - \beta_3 + 1 \end{cases} \Rightarrow -\cancel{3} = -2\beta_1 + 2 \Rightarrow \beta_1 = \cancel{0}\ \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \beta_3 = \cancel{3 - 3 = 0}\ -\frac{15}{2} + 3 = -\frac{9}{2}$$

Donc

$$\tilde{Y}(t) = \left(t + \frac{5}{2},\ 0,\ -2t - \frac{9}{2}\right)^T$$

d) Les solutions de (3) sont alors de la forme

$$Y(t) = \begin{pmatrix} t + \frac{5}{2} \\ 0 \\ -2t - \frac{9}{2} \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ -3e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} 2c_1 + 2c_2 - c_3 = -\frac{3}{2} \\ c_2 = 0 \\ -3c_1 + c_3 = \frac{13}{2} \end{cases}$$

Ceci donne $-c_1 = 5 \Rightarrow c_1 = -5 \Rightarrow c_3 = -\frac{17}{2}$

Donc $c_1 = -5$; $c_2 = 0$; $c_3 = -\frac{17}{2}$

donc
$$Y(t) = \begin{pmatrix} t + \frac{5}{2} - 5e^{t} + \frac{17}{2}e^{2t} \\ 0 \\ -2t - \frac{9}{2} + 15e^t - \frac{17}{2}e^{2t} \end{pmatrix}$$

<u>Exo 3.</u>

$$\int_\gamma F \cdot dx = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = \int_0^{2\pi} \langle (\cos t + 2\sin t, \cos^2 t), (-\sin t, 2\cos t)\rangle = -\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin t\cos t\, dt}_{=(\sin^2 t)'} - 2\underbrace{\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 t}_{=\frac{1-\cos 2t}{2}}}_{=\pi} + 2\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^3 t\, dt}_{=(1-\sin^2 t)(\sin t)'}$$

$$= 0 - 2\pi + 2 \cdot 0 = -2\pi$$