Corrigé

Partiel 1, OMI1
Méca 3, 2013-2014

Exo 1.

On met le système sous la forme

$Ax = b$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$

On calcule $r = \text{rang}(A) \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$r = 3$? $\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = 0$

(Col 1 × (−1) + Col 2
Col 1 × 1 + Col 3

Alors $r < 3$

$r = 2$? Oui, car $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -7 \neq 0$

Donc $r = 2$

On regarde la matrice $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Alors le système admet des solutions ssi $\det(A') = 0$

$\det(A') = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & m-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ col 1 × (−1) + Col 2
Col 1 × (−1) + Col 3

$= \det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & m-1 \end{pmatrix} = -2(m-1) - 6 = -2(m+2)$

Donc si $m \neq -2$ il n'y a pas des solutions
si $m = -2$ il y a des solutions

Suppos. $m = -2$

x_1, x_2 inconnues principales

On ignore la 3-ème equations

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 = -2 - 2x_3 \end{cases}$$

Ceci donne $x_1 = 0$ et $x_2 = 1 + x_3$

Solution : $(0, 1 + x_3, x_3)$, $x_3 \in \mathbb{R}$

Exo 2.

a) Comme $u_1 \neq 0$ alors $\dim(E_1) = 1$

Montrons que u_2 et u_4 sont indépendantes (c'est plus simple u_2 et u_4)

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$ alors

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$ et ceci donne $\alpha = \beta = 0$

Nous observons que $u_3 = 2u_2 + u_4$

Alors $E_2 = \mathrm{Vect}(u_2, u_4)$

donc $\dim(E_2) = 2$

b) Nous voulons qu'il existent $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$ c'est à dire

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha + \beta \\ 2 = \beta \\ a = \alpha + \beta \end{cases}$$

Des deux premières equations on deduit

$\beta = 2$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$

Alors la troisième equation est satisfaite ssi $a = \frac{3}{2}$

On a alors

~~$E_1 \subset E_2$~~ $u_1 \in E_2$ ssi $a = \frac{3}{2}$

On voit immédiatement que

$u_1 \in E_2$ ssi $E_1 \subset E_2$

On trouve alors $a = \frac{3}{2}$

c) Comme $E_1 \not\subset E_2$ alors $a \neq \frac{3}{2}$.

c1) Si $x \in E_1 \cap E_2$ alors

$x = \alpha u_2 + \beta u_4 = \gamma u_1$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

On a alors

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \beta = 2\gamma \\ \alpha + \beta - \gamma a = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{\gamma}{2} \\ \beta = 2\gamma \\ \alpha + \beta - \gamma a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\frac{\gamma}{2} \\ \beta = 2\gamma \\ \left(\frac{3}{2} - a\right)\gamma = 0 \end{cases}$$

Comme $a \neq \frac{3}{2}$ ceci donne $\alpha = \beta = 0$ donc $x = 0$.

c2) On prend $u_1 \in E_1 \cup E_2$ A-t-on $u_1 + u_2 \in E_1 \cup E_2$

$u_2 \in E_1 \cup E_2$

~~u_1+u_2~~ i) Supposons $u_1 + u_2 \in E_1$.

Alors $u_1 + u_2 = \alpha u_1$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Si $\alpha = 1$ alors $u_2 = 0$ impossible $\Rightarrow u_1 = \frac{1}{\alpha - 1} u_2$

si $\alpha \neq 1$ alors ~~$u_2 = \alpha$~~ $u_1(\alpha - 1) = u_2$

donc $u_1 \in E_2$ contradiction avec $E_1 \not\subset E_2$

ii) Supposons $u_1 + u_2 \in E_2$. avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

Alors $u_1 + u_2 = \alpha u_2 + \beta u_4$ de nouveau contradiction avec

$u_1 = (\alpha - 1) u_2 + \beta u_4 \in E_2$ $E_1 \not\subset E_2$

Donc $u_1 + u_2 \notin E_1 \cup E_2$

Alors $E_1 \cup E_2$ n'est pas un ~~espace~~ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Exo 3.

a) $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 & 6 \\ 4 & -5-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 6-\lambda \end{pmatrix}$ ligne 3 × (−2) + ligne 1

$= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 2\lambda - 6 \\ 4 & -5-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -5-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 6-\lambda \end{pmatrix}$

col 1 × 2 + Col 3

$= (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5-\lambda & 20 \\ 1 & -2 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 20 \\ -2 & 8-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 5\lambda - 40 + 40) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) = -\lambda(\lambda-3)^2$

$\underline{\lambda_1 = 0}$ $m_1 = 1$; $\lambda_2 = 3$ et $m_2 = 2$

b) $\underline{\lambda_1 = 0}$ ~~Résoudre~~ $Ax = 0$ rang $A = 2$ car ~~$\det \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = -9$~~

$\det \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -8 + 5 = -3 \neq 0$: $\dim(E_1(\mathbb{R})) = 1$

$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 12x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$. On trouve $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = 3}$

Résoudre $(A - 3I_3)x = 0$

$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 12 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. rang$(A) = 1$ (ligne 1 = ligne 3 $\times$ 2 ; ligne 2 = ligne 3 $\times$ 4)

Alors $\dim(E_2(\mathbb{R})) = 2$

$2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0$

si $x_2 = 1$ et $x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

si $x_2 = 0$ et $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -3$

Alors $P_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $P_{2,2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a alors $A = PDP^{-1}$ avec

$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Donc D est semblable à A

~~c) $A^k = PD^kP^{-1}$. On a : $D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$~~

~~$P^{-1} = \frac{1}{3}$~~