COURS OUTILS MATHEMATIQUES POUR L'INGENIEUR 1

MECANIQUE 3, Polytech Lyon, 2016-2017

Ionel Sorin CIUPERCA

Partie 1

Table des matières

Chapitre 1

Courbes et surfaces

1.1 Courbe paramétrée et intégrale courviligne

1.1.1 Quelques rapels d'analyse

Notations :

1. Dans tout ce cours n désigne un nombre naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).
   Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ sera noté $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T$ (vecteur colonne).
2. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note par $< x, y > \in \mathbb{R}$ le **produit scalaire** de x et y, qui est donné par
   $$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i.$$
   On peut aussi utiliser la notation $x \cdot y$ pour le produit scalaire entre x et y.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on note par $\|x\| \geq 0$ la **norme euclidienne** de x, donnée par
   $$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$
4. Pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ on notera par $B(x, r)$ la **boule ouverte** du centre x et rayon r, donnée par
   $$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n, \quad \|y - x\| < r\}.$$

Rappellons aussi les définitions suivantes :

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On dit que Ω est un ensemble **ouvert** si pour tout $x \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$.
2. Si $\left\{x^{(k)}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathbb{R}^n$ et x est un élément de $\mathbb{R}^n$ on dit que $x^{(k)}$ **converge** vers x (notée $x^{(k)} \to x$) si $\|x^{(k)} - x\| \to 0$.
   Rappellons que nous avons : $x^{(k)} \to x$ si et seulement si $x_i^{(k)} \to x_i$ en $\mathbb{R}$ où $x_i^{(k)}$ (respectivement x_i) est la i-ème composante de $x^{(k)}$ (respectivement x).

3. Soit U un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \mapsto \mathbb{R}^m$.
   On dit que f est **continue** en $x \in U$ si $f(x^{(k)}) \to f(x)$ pour toute suite $x^{(k)} \subset U$ telle que $x^{(k)} \to x$.
   (on peut aussi écrire :
   $$\lim_{y \to x} f(y) = f(x) \quad)$$
   On dit que f est continue sur U si f est continue en tout point $x \in U$; nous notons par $C(U, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des fonctions continues de U à valeurs dans $\mathbb{R}^m$
   Remarque : Si $f = (f_1, f_2, \cdots f_m)$ avec $f_1, f_2, \cdots f_m : U \to \mathbb{R}$ alors f est continu en $x \in U$ si et seulement si $f_1, f_2, \cdots f_m$ sont continues en x.

Définition 1.1. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert.*
a) *Considérons $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.*
a1) *Soit $t_0 \in I$. On dit que f est* **dérivable** *en t_0 si la limite suivante existe et appartient à $\mathbb{R}$:*
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$
Cette limite est notée $f'(t_0)$ et c'est la **dérivée** *de f en t_0.*
a2) *On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en t_0 pour tout $t_0 \in I$. On notera alors par f' la fonction $f' : I \mapsto \mathbb{R}$ qui à tout $t \in I$ associe $f'(t) \in \mathbb{R}$.*
b) *Considérons $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction à valeurs vectorielles $f = (f_1, f_2, \cdots f_n)^T$ avec $f_1, f_2, \cdots f_n : I \mapsto \mathbb{R}$.*
b1) *Soit $t_0 \in I$. On dit que f est* **dérivable** *en t_0 si f_k est dérivable en t_0 pour tout $k = 1, 2, \cdots n$. On notera alors $f'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0), \cdots f_n'(t_0))^T \in \mathbb{R}^n$.*
b2) *On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en t_0 pour tout $t_0 \in I$. On notera alors par f' la fonction $f' : I \mapsto \mathbb{R}^n$ qui à tout $t \in I$ associe $f'(t) \in \mathbb{R}^n$.*
Remarque : *On peut aussi dire que f est dérivable sur I si f_k est dérivable sur I pour tout $k = 1, 2, \cdots n$.*
c) *Considérons $f : I \mapsto \mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et la dérivée f' est continue sur I ; on notera par $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qui sont de classe C^1 sur I.*

Définition 1.2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et notons $I =]a, b[$ et $\overline{I} = [a, b]$ (adhérence de I). Soit $f : \overline{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction. On dit que f est de classe C^1 sur $\overline{I}$ si f est continue sur $\overline{I}$, f' existe et est continue sur I et elle se prolonge par continuité en a et b, donc ils existent*
$$\lim_{t \to a, t > a} f'(t) \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to b, t < b} f'(t).$$
On va considérer alors f' comme étant définie sur $\overline{I}$ en posant $f'(a) = \lim_{t \to a, t > a} f'(t)$ et $f'(b) = \lim_{t \to b, t < b} f'(t)$.
On notera par $C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions définies sur $\overline{I}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qui sont de classe C^1 sur $\overline{I}$.

Remarque 1.1. *Il est évident que si $f \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}^n)$ alors la restriction de f sur I est dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, mais l'inverse est fausse en général.*

Exemples : en classe

Définition 1.3. *Soient A et B deux ensembles non-vides et $f : A \to B$ une fonction. On dit que f est*

1. **injective** *si* $\forall\, x_1, x_2 \in A$ *on a* $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ *(ce qui est équivalent avec* $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$*).*
2. **surjective** *si* $\forall\, y \in B\; \exists x \in A$ *tel que* $y = f(x)$
3. **bijective** *si f est à la fois injective et surjective.*

Exemples : en classe

1.1.2 Paramétrisations et courbes

Définition 1.4.

1. *On appelle* **arc paramétré** *de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$ (on peut aussi dire* **paramétrisation** *de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$) un couple* $([a,b],\ \gamma)$ *avec* $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ *et* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *une fonction de classe C^1.*
2. *On appelle* **support** *de l'arc paramétré* $([a,b],\ \gamma)$ *l'ensemble* $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$ *; on l'appelle aussi* **courbe** *de classe C^1 associée à l'arc paramétré* $([a,b],\ \gamma)$*. On dira aussi que* $([a,b],\ \gamma)$ *est une paramétrisation de la courbe* $\gamma([a,b])$*.*
3. *Le point* $\gamma(a) \in \mathbb{R}^n$ *est appellé* **point initial** *de la paramétrisation tandis que le point* $\gamma(b) \in \mathbb{R}^n$ *est appellé* **point final***. Le sous-ensemble* $\gamma(]a,b[) \subset \mathbb{R}^n$ *s'appelle* **partie intérieure** *de la paramétrisation.*
4. *On dit que l'arc paramétré* $([a,b],\ \gamma)$ *est* **simple** *si la restriction de γ sur* $]a,b[$ *est une fonction injective.*

Remarque 1.2.

1. *Un arc paramétré permet de décrire la courbe support associée mais aussi de donner un "sense de parcours" sur cette courbe.*
2. *Par commodité on peut dire que l'arc paramétré est γ au lieu de dire que c'est* $([a,b],\ \gamma)$*.*
3. *On peut rencontrer dans la littérature de spécialité d'autres noms que que celui de arc paramétré :* **courbe paramétrée***,* **chemin***, etc ..*

Exemple 1.1. *(paramétrisation d'un graph de fonction)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Nous considérons le graph de f qui est l'ensemble suivat en $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma = \{(x,\ f(x)) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in [a,b]\}.$$

La définition de Γ nous suggère la paramétrisation suivate pour Γ : on introduit la fonction $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (t,\ f(t)), \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Alors $([a, b], \gamma)$ est un arc paramétré dont le support est le graph Γ de f. On remarque que cet arc paramétré est simple.

Exemple 1.2. *(paramétrisation d'un cercle)*
Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. On considére dans le plan $\mathbb{R}^2$ le cercle de centre α et de rayon r :

$$C(\alpha, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 = r^2\}.$$

On introduit la fonction $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + r\cos t \\ \alpha_2 + r\sin t \end{pmatrix}, \quad \forall\, t \in [0, 2\pi].$$

Alors $([0, 2\pi], \gamma)$ est un arc paramétré de classe C^1 en $\mathbb{R}^2$ (on observe que γ est de classe C^∞). Il est facile de voir que le support de cet arc paramétré (ou sa courbe associée) est le cercle $C(\alpha, r)$.
Remarquons que le point initial et le point final coincident et que cette paramétrisation est simple et "parcourt" le cercle dans le sense trigonométrique.
Si on veut paramétriser seulement une partie du cercle, on peut prendre t dans un intervalle strictement inclu en $[0, 2\pi]$ (par exemple on peut paramétrer un demi-cercle, en prennant $t \in [0, \pi]$). On peut aussi prendre t dans un intervalle qui inclu strictement $[0, 2\pi]$ et dans ce cas une partie au moins du cercle peut être "parcourue" plusieurs fois ; une telle paramétrisation n'est pas simple.

Exemple 1.3. *(Paramétrisation d'un segment)*
Considérons le segment $[AB]$ qui unit deux points $A, B \in \mathbb{R}^n$, avec $A = (A_1, A_2, \cdots A_n)^T$ et $B = (B_1, B_2, \cdots B_n)$. Il faut voir ce segment comme une courbe dans l'espace $\mathbb{R}^n$. Nous avons par définition

$$[AB] = \{A + t(B - A),\ t \in [0, 1]\}.$$

Cette définition nous sugère qu'on peut définir une paramétrisation de $[AB]$ de la forme $([0, 1],\ \gamma)$ avec $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ donnée par

$$\gamma(t) = A + t(B - A) \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Cet arc paramétré "parcourt" le segment de A vers B. Si on veut une paramétrisation qui "parcourt" le même segment mais de B vers A, alors il faut inverser A et B dans l'expression de γ.

Remarque 1.3. *La paramètrisation générale donnée ci-dessus n'est pas la seul possible pour un segment donné. Par exemple, pour $A = (-2, 1)$ et $B = (4, 1)$ on peut donner une paramétrisation qui s'inspire de l'Exemple 1.1, où on peut voir le segment comme le graph de la fonction constante égale à 1. On peut donner alors une paramètrisation plus simple pour $[AB]$ qui est $([-2, 4], \gamma_1)$ avec $\gamma_1 : [-2, 4] \to \mathbb{R}^2$ donnée par*

$$\gamma_1(t) = (t, 1), \quad \forall\, t \in [-2, 4].$$

D'autre part, en suivant le méthode générale décrite dans l'Exemple 1.3 on peut donner une paramétrisation "standard" pour $[AB]$ qui est $([0, 1], \gamma_2)$ avec $\gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma_2(t) = (-2, 1) + t[(4, 1) - (-2, 1)] = (-2 + 6t, 1) \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Ces deux paramétrisations du même segment sont en quelque sorte "équivalentes". Nous donnons dans la suite une notion générale d'équivalence entre deux paramétrisations :

Définition 1.5. *Soient $([a, b], f)$ et $([c, d], g)$ deux paramétrisation de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$. On dit que ces deux paramétrisations sont* **équivalentes** *s'il existe une fonction $\Phi : [a, b] \to [c, d]$ telle que :*

1. *Φ est de clase C^1 et $\Phi'(t) > 0$, $\forall\, t \in [a, b]$*
2. *Φ est bijective*
3. *$g \circ \Phi = f$.*

Remarque 1.4. *On peut remplacer la condition 2) de la définition précédente par $\Phi(a) = c$ et $\Phi(b) = d$.*

Exemple : Considérons la paramétrisation $([0, 2\pi], f)$ de l'Exemple 1.2, avec $a = (0, 0)$ et $r = 1$, donc

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \forall\, t \in [0, 2\pi].$$

Cette paramétrisation a comme support le cercle de centre $(0, 0)$ et rayon 1 en $\mathbb{R}^2$. Une paramétrisation équivalente en est $([0, 1], g)$ avec $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$s \in [0, 1] \;\mapsto\; g(s) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi s) \\ \sin(2\pi s) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Montrons que les paramétrisations $([0, 2\pi], f)$ et $([0, 1], g)$ sont équivalentes. Considérons la fonction $\Phi : [0, 2\pi] \to [0, 1]$ définie par

$$\Phi(t) = \frac{t}{2\pi} \quad \forall\, t \in [0, 2\pi].$$

Il est clair qu'on a

1. Φ de classe C^1 et $\Phi' > 0$ car $\Phi'(t) = \frac{1}{2\pi}$, $\quad \forall t \in [0, 2\pi]$

2. Φ bijective car Φ est strictement croissante avec $\phi(0) = 0$ et $\Phi(2\pi) = 1$
3. $g \circ \Phi = f$, car

$$g(\Phi(t)) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi \frac{t}{2\pi}) \\ \sin(2\pi \frac{t}{2\pi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = f(t) \quad \forall\, t \in [0, 2\pi].$$

Ceci finit la preuve de l'équivalence.

Proposition 1.1. *Soient* $([a,b], f)$ *et* $([c,d], g)$ *deux paramétrisations de classe* C^1 *en* $\mathbb{R}^n$ *équivalentes. Alors on a*
a) *Les courbes associées aux deux paramétrisations coincident*
b) *Les deux paramétrisations "parcourent la courbe associée dans le même sense".*

Remarque : L'affirmation "parcourent la courbe associée dans le même sense" n'est pas très précise mathématiquement mais elle est intuitive : cela veut dire que si un point x de la courbe est "pris" avant un autre point y de la courbe par une paramétrisation, alors c'est le cas aussi pour l'autre paramétrisation.

Preuve de la partie **a)** *de la Proposition :* Soit la fonction Φ comme dans la Définition 1.5. Notons les ensembles :

$$A = \{f(t),\ t \in [a,b)\}$$

et

$$C = \{g(s),\ s \in [c,d)\}$$

et on doit montrer que $A = C$. On va procéder par double inclusion.
Soit $y = g(s) \in C$ avec $s \in [c,d]$ fixé. Alors il existe $t \in [a,b]$ tel que $s = \Phi(t)$. On a alors

$$y = g(s) = g(\Phi(t)) = f(t) \in A.$$

ce qui montre $C \subset A$. Pour montrer $A \subset C$ on considère $x = f(t) \in A$ avec $t \in [a,b]$ fixé. On a alors

$$x = f(t) = g(\Phi(t)) = g(s)$$

avec $s = \Phi(t) \in [c,d]$, donc $x \in C$; ceci finit la preuve.

Définition 1.6. *Soit* $([a,b], \gamma)$ *une paramétrisation* C^1 *en* $\mathbb{R}^n$*. On appelle paramétrisation* **opposée** *de* $([a,b], \gamma)$ *la paramétrisation* C^1 *qui s'écrit* $([a,b], \gamma^O)$ *avec* $\gamma^O : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *définie par*

$$\gamma^O(t) = \gamma(a + b - t), \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Remarque 1.5. *1. On pourra dire pour simplifier que c'est γ^O qui est la paramétrisation opposée de γ.*

2. Les deux paramétrisations γ et γ^O ont la même courbe support, mais elles parcourent cette courbe au sense contraire.

Exemple : Considérons la paramétrisation standard pour le cercle de centre 0 et rayon 1 en $\mathbb{R}^2$ qui est $([0, 2\pi], \gamma)$ avec

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad \forall\, t \in [0, 2\pi].$$

Alors la paramétrisation opposée est $([0, 2\pi], \gamma^O)$ avec

$$\gamma^O(t) = (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t)) = (\cos t, -\sin t), \quad \forall\, t \in [0, 2\pi].$$

Cet arc paramétré parcourt le cercle dans le sense inverse trigonométrique.

Définition 1.7. *Soit $([a, b],\ \gamma)$ une paramétrisation C^1 en $\mathbb{R}^n$. On appelle* **tangente** *en $t_0 \in [a, b]$ à la paramétrisation γ le vecteur $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$.*

Remarques : Le nom "tangente" est motivé par le fait que pour $\gamma'(t_0) \neq 0$ la différence entre les points de la courbe support de $([a, b],\ \gamma)$ et les points de la droite passant par $\gamma(t_0)$ et ayant $\gamma'(t_0)$ comme vecteur directeur est "très petite" si on est proche de $\gamma(t_0)$. En effet comme γ est de classe C^1 on a

$$\gamma(t_0 + s) - [\gamma(t_0) + s\gamma'(t_0)] = o(s) \quad \text{pour} \quad s \to 0.$$

(le terme $o(s)$ désigne un terme tel que $o(s)/s \to 0$ pour $s \to 0$.).

Définition 1.8. *Soit $([a, b],\ \gamma)$ une paramétrisation de classe C^1 en $\mathbb{R}^2$.*

1. Soit $t_0 \in [a, b]$ et $M_0 = \gamma(t_0) \in \mathbb{R}^2$. On dit que t_0 est **régulier** *pour la paramétrisation γ si $\gamma'(t_0) \neq 0$ (tangente non nulle en t_0).*
On appelle alors **vecteur normal** *à γ (ou à la courbe $\gamma([a, b])$) et au point t_0 le vecteur $\nu^0 \in \mathbb{R}^2$ définit par*

$$\nu^0 = \frac{(\gamma_2'(t_0),\ -\gamma_1'(t_0))}{\|(\gamma_2'(t_0),\ -\gamma_1'(t_0))\|}.$$

2. On dit que la paramétrisation γ est **régulière** *si tout paramètre $t \in]a, b[$ est régulier pour γ.*

Remarque 1.6. *1. Le vecteur ν^0 est bien défini, non nul (car $(\gamma_2'(t_0),\ -\gamma_1'(t_0)) \neq 0$) et de norme égale à 1 (car $\|\nu^0\| = \frac{\|(\gamma_2'(t_0), -\gamma_1'(t_0))\|}{\|(\gamma_2'(t_0), -\gamma_1'(t_0))\|} = 1$).*

2. Le vecteur tangent et le vecteur normal sont orthogonaux, car $< \gamma'(t_0),\ \nu^0 > = 0$ (facile à vérifier).

3. En paramétrisant la même courbe par la paramétrisation opposée γ^O on inverse l'orientation du vecteur tangent ainsi que du vecteur normal.

4. *Dans le cas où la paramétrisation γ est simple alors pour tout $t_0 \in]a, b[$ on peut dire "tangente en $\gamma(t_0)$ à γ" au lieu de dire "tangente en t_0 à γ". De la même manière on peut dire "vecteur normal en $\gamma(t_0)$ à γ" au lieu de dire "vecteur normal en t_0 à γ".*

Exemple :
On considère la paramétrisation "standard" du cercle de centre $(0,0)$ et rayon 1 en $\mathbb{R}^2$, donnée par $([0,2\pi],\gamma)$ avec $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad \forall\, t \in [0,2\pi].$$

Pour un point $t \in [0,2\pi]$ fixé la tangente en t (ou en $\gamma(t)$) sera le vecteur
$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$.
Comme $\gamma'(t) \neq 0,\ \forall t \in [0,2\pi]$ (car $\|\gamma'(t)\| = 1 \neq 0$), alors la paramétrisation γ est régulière. On peut alors définir le vecteur normal à γ, en tout point t (ou $\gamma(t)$), qui sera

$$\nu = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)) = (\cos t, \sin t) = \gamma(t).$$

1.1.3 Courbes de classe C^1 par morceaux

Nous avons besoin souvent dans la pratique de considérer une courbe que s'écrit comme l'union de plusieurs courbes de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.9. *Considérons un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$.*

1. *On dit que Γ est une* **courbe de classe C^1 par morceaux** *en $\mathbb{R}^n$ si :*
   - soit Γ est une courbe de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$
   - soit Γ s'écrit sous la forme

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_k = \cup_{j=1}^{k} \Gamma_j, \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N},\ k \geq 2 \tag{1.1}$$

   où $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots \Gamma_k$ sont des courbes de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$
2. *Supposons que Γ s'écrit sous la forme (1.1). On dit que $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_k$ est une paramétrisation* **de classe C^1 par morceaux** *de Γ si pour tout $j = 1, 2, \cdots k$ on a que γ_j est une paramétrisation de classe $\mathbb{C}^1$ en $\mathbb{R}^n$ de Γ_j.*
3. *on dit qu'une paramétrisation $\gamma = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_k,\ k \in \mathbb{N}^*$ d'une courbe de classe C^1 par morceaux est* **simple** *si*
   - dans le cas où $k = 1$: γ est une paramétrisation simple (en tant que paramétrisation de classe C^1)
   - dans le cas où $k \geq 2$: $\gamma_1, \cdots \gamma_k$ sont simples et en plus les parties intérieures des $\gamma_1, \cdots \gamma_k$ sont deux à deux disjointes.

Exemple 1.4. *Pour paramétriser la frontière du triangle ABC dans le plan $\mathbb{R}^2$ avec $A = (0,0),\ B = (1,0),\ C = (0,1)$ nous considérons une paramétrisation pour chacun des segments $[AB], [BC]$ et $[CA]$. Les paramétrisations sont $([0,1], \gamma_i),\ i = 1,2,3$ avec*

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \quad \forall\, t \in [0,1]$$

(pour le segment $[AB]$)

$$\gamma_2(t) = (1-t, t), \quad \forall\, t \in [0,1]$$

(pour le segment $[BC]$)

$$\gamma_3(t) = (0, 1-t), \quad \forall\, t \in [0,1]$$

(pour le segment $[CA]$).
Alors $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ sera une paramétrisation de classe C^1 par morceaux de la frontière $\Gamma = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$ du triangle ABC. En plus cette paramétrisation est simple.

1.1.4 Longueur d'une courbe

Définition 1.10. *Soit $([a,b], \gamma)$ un arc paramétré de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$. On appelle* **longueur** *de cet arc paramétré, noté $L(\gamma)$, le nombre réel et positif définit par*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Remarque 1.7. *Si l'arc paramétré est simple alors la longueur de l'arc coincide avec la longueur de la courbe associée à cet arc.*

Exemple :
Considérons l'arc paramétré donné dans l'Exemple 1.3 pour la paramétrisation d'un segment. Nous avons : $\gamma'(t) = B - A, \quad \forall\, t \in [0,1]$ donc

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|f'(t)\|\, dt = \int_0^1 \|B - A\|\, dt = \|B - A\|.$$

On a la généralisation suivante pour le cas des courbes de classe C^1 par morceaux :

Définition 1.11. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1 par morceaux et $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_k$ une paramétrisation de Γ. On appelle* **longueur** *de la paramétrisation γ, noté $L(\gamma)$, le nombre réel et positif définit par*

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) + \cdots L(\gamma_k) = \sum_{j=1}^{k} L(\gamma_j).$$

Remarque 1.8. *Dans le cas ou la paramétrisation γ est simple alors la longueur de la paramétrisation γ coincide avec la longueur de la courbe Γ.*

Proposition 1.2. *Soient $([a,\, b], f)$ et $([c,\, d], g)$ deux paramétrisations C^1 dans $\mathbb{R}^n$. On a alors : si*
· f et g sont équivalentes
ou
· f et g sont en opposition, donc $g = f^O$ (dans ce cas on a forcément $a = c$ et $b = d$)
alors $L(f) = L(g)$.

Démonstration. On fera la preuve dans le cas où f et g sont équivalentes ; la preuve dans le cas où f et g sont en opposition est analogue et est laissée en exercice.
Donc on va supposer qu'il existe une fonction $\Phi : [a,b] \to [c,d]$ de classe C^1 avec les propriétés de la Définition 1.5. On a alors $f = g \circ \Phi$ et par dérivation des fonctions composées on a

$$f'(t) = \Phi'(t)\, g'(\Phi(t)), \quad \forall\, t \in [a,b]$$

donc

$$\|f'(t)\| = \Phi'(t)\, \|g'(\Phi(t))\|, \quad \forall\, t \in [a,b]$$

On a alors

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt = \int_a^b \Phi'(t)\, \|g'(\Phi(t))\|\, dt.$$

En utilisant le changement des variables $s = \Phi(t)$ dans la dernière intégrale on obtient

$$\int_a^b \Phi'(t)\, \|g'(\Phi(t))\|\, dt = \int_c^d \|g'(s)\|\, ds = L(g)$$

ce qui donne le résultat. □

1.1.5 Circulation d'un champ de vecteurs (ou intégrale courviligne)

Définition 1.12. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On appelle* **champ de vecteurs** *sur U une application $f : U \to \mathbb{R}^n$ (on l'écrit parfois sous la forme $\vec{f}$ pour signifier que la fonction est à valeurs vectorielles).*

Exemple : Pour un fluide qui occupe un domaine $U \subset \mathbb{R}^3$, son mouvement est caractérisé par sa vitesse en chaque point du domaine et à chaque moment du temps. Pour un instant de temps donné, la vitesse est une fonction $v : U \to \mathbb{R}^3$, donc elle peut être vue comme un champ des vecteurs défini sur U.

Définition 1.13. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs.*

1. *Soit $([a,b], \gamma)$ un arc paramétré de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$ tel que $\gamma([a,b]) \subset U$ (donc la courbe associée à γ est incluse dans U).*
   On appelle **circulation** *de f sur γ notée $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ le nombre réel définit (s'il existe) par :*

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_a^b < f(\gamma(t)),\, \gamma'(t) > \, dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

2. *Soit $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_k$ une paramétrisation d'une courbe de classe C^1 par morceaux, et supposons que cette courbe est incluse en U.*
   On appelle **circulation** *de f sur γ notée $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ le nombre réel définit (s'il existe) par :*

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(x) \cdot dx.$$

L'exemple principal de circulation vient de la physique. Si le champ de vecteurs est une force alors la circulation de cette force sur une courbe paramétrée n'est autre que le **travail** de cette force sur cette courbe.

Remarque 1.9. *1. Si la fonction f est continue alors la circulation de f sur γ existe toujours, car si γ est une paramétrisation C^1 alors la fonction*

$$t \;\mapsto\; < f(\gamma(t)),\, \gamma'(t) > \in \mathbb{R}$$

est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$, donc intégrable grâce au Théorème de Weierstrass.

2. *En écrivant formellement $dx = (dx_1,\, dx_2, \cdots dx_n)$ et en notant $f = (f_1, f_2, \cdots f_n)$, alors une notation alternative pour la circulation $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ de f sur γ est*

$$\int_\gamma [f_1(x)dx_2 + f_2(x)dx_2 + \cdots f_n(x)dx_n].$$

On l'appelle aussi **l'intégrale courviligne** *de la forme différentielle $f_1dx_1 + f_2dx_2 + \cdots f_ndx_n$ sur la paramétrisation γ.*

Proposition 1.3. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Soient $([a,\, b], \alpha)$ et $([c,\, d], \beta)$ deux paramétrisations C^1 dans $\mathbb{R}^n$. On a alors :*

1. *Si α et β sont équivalentes alors*

$$\int_\alpha f \cdot dx = \int_\beta f \cdot dx.$$

2. *Si α et β sont en opposition, donc $\beta = \alpha^O$, alors*

$$\int_\alpha f \cdot dx = -\int_\beta f \cdot dx.$$

Démonstration. La preuve est très proche de celle de la Proposition 1.2 et est laissée en exercice. □

Nous finissons par le résultat suivant de **linéarité** de la circulation :

Proposition 1.4. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ deux constantes et γ une paramétrisation de classe C^1 par morceaux en $\mathbb{R}^n$. Alors on a*

$$\int_\gamma (a_1 f_1 + a_2 f_2) \cdot dx = a_1 \int_\gamma f_1 \cdot dx + a_2 \int_\gamma f_2 \cdot dx.$$

Démonstration. La preuve est très simple, elle utilise la linéarité de l'intégrale et est laissée en exercice. □

1.2 Nappes paramétrées et surfaces

1.2.1 Quelques rappels d'analyse et d'algèbre

Ensemble fermé, adhérence, frontière

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble.

1. On dit que A est **fermé** si $\mathbb{R}^n - A$ est ouvert.
   On a la caractérisation suivante : A est fermé si et seulement si pour toute suite $x^{(k)} \subset A$ qui converge vers un élément $x \in \mathbb{R}^n$ on a $x \in A$.
2. On appelle **adhérence** de A notée $\overline{A}$ le plus petit ensemble fermé contenant A (on a forcément $A \subset \overline{A}$).
   Nous avons la caractérisation suivante : l'adérence de A est l'ensemble de toutes les limites des suites de A.
3. Supposons que A est un ensemble ouvert. On appelle **frontière** de A notée ∂A l'ensemble $\partial A = \overline{A} - A$.

Dérivées partielles :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non-vide et $m \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction (à variable vectorielle et valeurs réelles).
   Pour tout $x \in \Omega$ et tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ on note (quand $\exists$)
   $$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \mapsto 0} \frac{1}{t} \left[f(x + te_j) - f(x) \right] \in \mathbb{R}$$
   où e_j est le j - ème élément de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire, tous les éléments du vecteur e_j valent 0 sauf le j - ème qui vaut 1.
   C'est la **dérivée partielle** de f en x par rapport à la variable x_j.
2. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction (à variables vectorielles et valeurs vectorielles) avec $f = (f_1, f_2, \cdots f_m)^T$ où $f_1, f_2, \cdots f_m : \Omega \to \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \Omega$ et tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ on note (quand $\exists$)
   $$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x), \frac{\partial f_2}{\partial x_j}, \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \right)^T \in \mathbb{R}^m.$$
   Si les dérivées partielles de f en x existent pour tout $x \in \Omega$ on peut définir une fonction, appellée $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, qui associe à tout $x \in \Omega$ la valeur $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}^m$.
   En plus pour tout $x \in \Omega$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ existe pour tout $j = 1, \cdots n$ nous notons par $J_f(x)$ la matrice à m lignes et n colonnes avec des éléments réels telle que
   $$(J_f(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \quad i = 1, \cdots m, \quad j = 1, \cdots n.$$
   La matrice $J_f(x)$ s'appelle **matrice Jacobienne** de f en x.

3. On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1 sur Ω si f est continue sur Ω et si pour tout $j \in \{1, 2, \cdots n\}$ la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ existe et est continue sur Ω (on peut dire : toutes les dérivées partielles existent et sont continues sur Ω). On notera par $C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 sur Ω.
4. On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ et si f ainsi que toutes ses dérivées partielles se prolongent par continuité sur $\overline{\Omega}$. On va noter par $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ qui sont de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ (on pourra considérer qu'une fonction qui est dans $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ est définie sur $\overline{\Omega}$, en pensant à son prolongement sur $\overline{\Omega}$).

Quelques opérateurs différentiels

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert non vide, $m \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^1(\overline{\Omega},\ \mathbb{R}^m)$.

1. Si $m = 1$ (donc la fonction f est à valeurs scalaires) on appelle **gradient** de f noté ∇f la fonction $\nabla f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)^T, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

2. Si $m = n$ (donc la fonction f est un champ de vecteurs) on appelle **divergence** de f notée $\nabla \cdot f$ (on la note parfois $div(f)$) la fonction $\nabla \cdot f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ définie par

$$(\nabla \cdot f)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

3. Si $m = n = 3$ (donc la fonction f est un champ de vecteurs tridimensionnel) on appelle **rotationnel** de f noté $\nabla \times f$ (on le note parfois $rot(f)$) la fonction $\nabla \times f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$(\nabla \times f)(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \Omega.$$

Indépendance, orthogonalité et produit vectoriel

On suppose ici $n \geq 2$.

1. On dit que deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ sont **indépendants** s'ils ne sont pas colinéaires (donc il n'existe pas $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $y = \beta x$ ou $x = \beta y$).
2. On dit que deux vecturs $x, y \in \mathbb{R}^n$ sont **orthogonaux** (noté $x \perp y$) si $x \cdot y = 0$

3. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T$ deux vecteurs en $\mathbb{R}^3$. On appelle **produit vectoriel** de x et y le vecteur dans $\mathbb{R}^3$ noté $x \times y$ défini par

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

4. Rappellons les résultats suivants sur le produit vectoriel :
   - Deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^3$ sont indépendants si et seulement si $x \times y \neq 0$.
   - Le vecteur $x \times y$ est orthogonal sur chacun des vecteurs x et y, donc $(x \times y) \perp x$ et $(x \times y) \perp y$.
   - On a toujours $y \times x = -\, x \times y$ (antisymétrie).

1.2.2 Définitions et exemples de nappes paramétrées

Définition 1.14. *1. On appelle* **nappe paramétrée** *de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$ le couple $(\overline{D}, \gamma)$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble non vide, ouvert et borné et $\gamma : D \to \mathbb{R}^n$ est une fonction appartenant à $C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$*
(on peut dire par commodité que la nappe paramétrée est γ au lieu de dire que c'est $(\overline{D}, \gamma)$).

2. On appelle **support** *de $(\overline{D}, \gamma)$ ou* **surface** *de classe C^1 associée à la nappe paramétrée $(\overline{D}, \gamma)$, l'ensemble $\gamma(\overline{D}) \subset \mathbb{R}^n$. On dira aussi que la nappe γ est une paramétrisation de la surface $\gamma(\overline{D})$.*

3. Soit $\partial D \subset \mathbb{R}^2$ la frontière de l'ouvert D. L'ensemble $\gamma(\partial D) \in \mathbb{R}^n$ est appellé **frontière** *de la paramétrisation γ ou de la surface $\gamma(\overline{D})$; l'ensemble $\gamma(D) \subset \mathbb{R}^n$ s'appelle* **partie intérieure** *de la paramétrisation γ ou de la surface $\gamma(\overline{D})$.*

4. On dit que la nappe paramétrée est **simple** *si la restriction de γ sur l'ouvert D est injective.*

Il y a aussi une notion **d'équivalence** des nappes, notion qui ne sera pas abordée dans ce cours.

Exemple 1.5. *(nappes des fonctions) Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble non vide, ouvert et borné et $g : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\overline{D}$. On sait alors que l'ensemble*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in \overline{D},\ z = g(x, y)\}$$

est une surface en $\mathbb{R}^3$ (on lui dit aussi "graphe" de la fonction g).
On peut voir cette surface comme la surface associée à la nappe paramétrée de classe C^1 $(\overline{D}, \gamma)$ avec $\gamma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\gamma(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x, y) \end{pmatrix}, \quad \forall\, (x, y) \in \overline{D}.$$

On dira aussi que γ est la nappe de la fonction à valeurs scalaires g.
Par exemple D peut être une région sur la Terre (supposée plane) et g peut représenter **l'altitude** *en tout point de $\overline{D}$. Alors la surface $\gamma(\overline{D})$ représente le relief dans cette région.*

Exemple 1.6. *(sphère en $\mathbb{R}^3$). Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$, $r > 0$ et posons $D =]0,\ 2\pi[\ \times\ ]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$. On introduit l'application $\gamma : D \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$\gamma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + r\cos\varphi\,\cos\theta \\ \alpha_2 + r\cos\varphi\,\sin\theta \\ \alpha_3 + r\sin\varphi \end{pmatrix} \quad \forall\ (\theta, \varphi) \in D.$$

Il est facile de voir que $\gamma \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^3)$, donc $(\overline{D}, \gamma)$ est une nappe paramétrée de classe C^1 en $\mathbb{R}^3$. On a aussi

$$\gamma(\overline{D}) = S(\alpha, r) \subset \mathbb{R}^3$$

où $S(\alpha, r) = \{x \in \mathbb{R}^3,\ \|x - \alpha\| = r\}$ est la sphère centrée en α et de rayon r en $\mathbb{R}^3$. Donc on peut dire que γ fournit une paramétrisation de la sphère générale en $\mathbb{R}^3$.

Remarque 1.10. *Très souvent ∂D est une courbe de classe C^1 par morceaux associée à une paramétrisation de la forme $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_k$, $\quad k \in \mathbb{N}^*$. Alors la frontière de la surface $\gamma(D)$ est aussi une courbe associée à une paramétrisation de classe C^1 par morceaux donnée par $\theta_1 \vee \cdots \vee \theta_k$, avec $\theta_j = \gamma \circ \varphi_j$, $\quad j = 1, 2, \cdots k$.*

Exemple : Si $D = B(0, 1) =$ le disque centré en 0 et de rayon 1 en R^2 alors une paramétrisation de la frontière de D (qui est le cercle de centre 0 et rayon 1) est $([0, 2\pi], \varphi)$ avec

$$\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t), \quad \forall\ t \in [0, 2\pi].$$

Considérons une fonction scalaire $g \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R})$ et $\gamma \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^3)$ la nappe de la fonction g (donc $\gamma(x, y) = (x,\ y,\ g(x, y))$, $\quad \forall\ (x, y) \in \overline{D}$). Alors la frontière de la surface $\gamma(\overline{D})$ est paramétrée par $([0, 2\pi],\ \gamma\circ\varphi)$; on a $(\gamma\circ\varphi)(t) = (\cos t,\ \sin t,\ g(\cos t,\ \sin t))$, $\quad \forall\ t \in [0, 2\pi]$.

1.2.3 Plan tangent et normale à une surface

On suppose dans cette section que D est un ensemble non vide, ouvert et borné en $\mathbb{R}^2$ et $(\overline{D}, \gamma)$ est une nappe paramétrée de classe C^1 en $\mathbb{R}^3$, donc

$$(u, v) \in \overline{D} \mapsto \gamma(u, v) \in \mathbb{R}^3.$$

Nous notons $\Sigma = \gamma(\overline{D})$ la surface support de γ. Soit $(u_0, v_0) \in \overline{D}$ un point fixé et notons $M^0 = \gamma(u_0, v_0) \in \Sigma$. On suppose que la fonction

$$u \quad \mapsto \quad \gamma(u, v_0) \in \mathbb{R}^3$$

peut être définie sur un intervalle du type $[a, b]$ avec $u_0 \in [a, b]$. En notant par γ_1 cette application on a que $([a, b], \gamma_1)$ est la paramétrisation C^1 d'une courbe que nous notons par Σ_1, qui contient le point M^0 et qui est incluse dans la surface Σ.
La tangente à la courbe γ_1 en u_0 (ou en $\gamma_1(u_0) = \gamma(u_0, v_0)$ si γ_1 est simple)) est le vecteur $\gamma_1'(u_0) = \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0)$. Nous notons ce vecteur par p^0, donc $p^0 = \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$.
De la même manière, on suppose que la fonction

$$v \quad \mapsto \quad \gamma(u_0, v) \in \mathbb{R}^3$$

peut être définie sur un intervalle du type $[c, d]$ avec $v_0 \in [c, d]$. En notant par γ_2 cette application on a que $([c, d], \gamma_2)$ est la paramétrisation C^1 d'une courbe que nous notons par Σ_2, qui contient elle aussi le point M^0 et qui est incluse dans la surface Σ.
La tangente à la courbe γ_2 en v_0 (ou en $\gamma_2(v_0) = \gamma(u_0, v_0)$ si γ_2 est simple) est le vecteur $\gamma_2'(v_0) = \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0)$. Nous notons ce vecteur par q^0, donc $q^0 = \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$.

Définition 1.15. *Avec les notations ci-dessus, on dit que :*

1. *le point (u_0, v_0) est* **régulier** *pour la paramétrisation γ (on peut dire : pour la surface Σ) si $p^0 \times q^0 \neq 0$, c'est à dire, si les vecteurs p^0 et q^0 sont indépendants.*
2. *la nappe paramétrisée $(\overline{D}, \gamma)$ est* **régulière** *(ou on peut dire que la surface associée Σ est régulière) si tout $(u_0, v_0) \in D$ est régulier.*

Dans le cas où (u_0, v_0) est régulier alors on peut introduire le sous-espace vectoriel de dimension 2 en $\mathbb{R}^3$, noté $Vect(p^0, q^0)$ engendré par les vecteurs p^0 et q^0, c'est à dire

$$Vect(p^0, q^0) = \{ap^0 + bq^0, \quad a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Définition 1.16. *Supposons que M^0 est régulier ; alors*

1. *L'espace vectoriel $E = Vect(p^0, q^0)$ est appellé* **plan tangent** *à la surface Σ (ou à la nappe paramétrée γ) en en (u_0, v_0).*
2. *On appelle* **vecteur normal** *à la nappe γ (ou à la surface Σ) et en (u_0, v_0) le vecteur noté $\nu^0 \in \mathbb{R}^3$ définit par*
$$\nu^0 = \frac{p^0 \times q^0}{\|p^0 \times q^0\|}$$

Remarque 1.11. *1. Le vecteur ν^0 est bien défini et non nul, car $p^0 \times q^0 \neq 0$.*

2. Le vecteur ν^0 satisfait les propriétés :
i) $\nu^0 \perp p^0$ et $\nu^0 \perp q^0$ ce qui implique $\nu^0 \perp Vect(p^0, q^0)$
(donc le vecteur normal ν^0 est orthogonal au plan tangent en M^0).
ii) $\|\nu^0\| = 1$ (car $\|\nu^0\| = \frac{1}{\|p^0 \times q^0\|}\|p^0 \times q^0\| = 1$).

3. On peut inverser la direction de ν^0 en inversant l'ordre des variables u et v, car dans ce cas l'ordre des vecteurs p^0 et q^0 sera inversée, ce qui change le signe de $p^0 \times q^0$.

4. Dans le cas où la nappe γ est simple on peut dire "plan tangent en M^0" au lieu de dire "plan tangent en (u_0, v_0)", et de même, "normale en M^0" au lieu de "normale en (u_0, v_0)".

5. En fait le vrai plan tangent à Σ en M^0 est obtenu par une translation :

$$M^0 + Vect(p^0, q^0) = \{\gamma(u_0, v_0) + ap^0 + bq^0, \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 1.7. *Reprenons l'Exemple 1.6 de la nappe paramétrée $(\overline{D}, \gamma)$ pour la sphère en $\mathbb{R}^3$ centrée en α et de rayon r. Pour tout $(\theta, \alpha) \in \overline{D}$ on a*

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \, \sin\theta \\ r\cos\varphi \, \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \, \cos\theta \\ r\sin\varphi \, \sin\theta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Un calcul immédiat nous donne

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \times \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}\right)(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} r^2\cos^2\varphi \, \cos\theta \\ r^2\cos^2\varphi \, \sin\theta \\ r^2\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

En posant $p = \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}$ et $q = \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}$, on peut écrire pour tout $(\theta, \varphi) \in \overline{D}$:

$$p \times q = r\cos\varphi[\gamma(\theta, \varphi) - \alpha].$$

Comme $\|\gamma(\theta, \varphi) - \alpha\| = r > 0$ alors $\gamma(\theta, \varphi) - \alpha \neq 0$.
Ceci nous dit que le point $\gamma(\theta, \varphi) \in S(\alpha, r)$ est régulier si et seulement si $\cos\varphi \neq 0$, c'est à dire $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$. On déduit alors que cette nappe paramétrée est régulière.
On aura alors $\|p \times q\| = r^2\cos\varphi$ (car $\cos\varphi \geq 0$) donc pour $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$ on a

$$\nu = \frac{p \times q}{\|p \times q\|} = \frac{1}{r}[\gamma(\theta, \varphi) - \alpha].$$

En particulier pour la sphère centrée en 0 et de rayon 1 (ce qui correspond à $\alpha = 0$ et $r = 1$) on trouve

$$\nu = \gamma(\theta, \varphi).$$

Remarque : La paramétrisation choisie nous donne un vecteur normal à la frontière qui est orienté vers **l'extérieur** du domaine entouré par la sphère, qui est la boule $B(\alpha, r)$ centrée en α et de rayon r.

On peut échanger l'ordre des paramètres, c'est à dire, choisir comme domaine des paramètres $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times]0, 2\pi[$ et comme nappe paramétrée la fonction

$$\gamma(\varphi,\, \theta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + r\cos\varphi\, \cos\theta \\ \alpha_2 + r\cos\varphi\, \sin\theta \\ \alpha_3 + r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \forall\, (\varphi, \theta) \in D.$$

Dans ce cas on aura

$$\nu = -\frac{1}{r}[\gamma(\varphi, \theta) - \alpha].$$

et le vecteur normal sera orienté vers **l'intérieur** de la boule $B(\alpha, r)$.

1.2.4 Surfaces de classe C^1 par morceaux

Nous avons besoin souvent dans la pratique de considérer une surface que s'écrit comme l'union de plusieurs surfaces de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.17. *Considérons un ensemble $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$.*

1. *On dit que Σ est une* **surface de classe C^1 par morceaux** *en $\mathbb{R}^n$ si :*
   - soit Σ est une surface de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$
   - soit Σ s'écrit sous la forme
   $$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_k = \cup_{j=1}^k \Sigma_j, \quad \textit{avec} \quad k \in \mathbb{N},\ k \geq 2 \tag{1.2}$$
   où $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots \Sigma_k$ sont des surfaces de classe C^1 en $\mathbb{R}^n$.
2. *Supposons que Σ s'écrit sous la forme (1.2). On dit que $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_k$ est une paramétrisation* **de classe C^1 par morceaux** *de Σ si pour tout $j = 1, 2, \cdots k$ on a que γ_j est une paramétrisation de classe $\mathbb{C}^1$ en $\mathbb{R}^n$ de Σ_j.*
3. *On dit qu'une paramétrisation $\gamma = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_k,\ k \in \mathbb{N}^*$ d'une surface de classe C^1 par morceaux est* **simple** *si*
   - dans le cas où $k = 1$: γ est une paramétrisation simple
   - dans le cas où $k \geq 2$: $\gamma_1, \cdots \gamma_k$ sont simples et en plus les parties intérieures des $\gamma_1, \cdots \gamma_k$ sont deux à deux disjointes.

1.3 Intégrales doubles, triples et de surface

1.3.1 Rappels intégrales doubles

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et borné et $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Rapellons brièvement comment on définit l'intégrale double (dont on admet l'existence) de f sur U, notée $\int\int_U f(x, y)\, dxdy \in \mathbb{R}$
(nous rappellons que dans le cas $f \geq 0$ cette intégrale représent le volume de l'ensemble tri-dimensionnel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \in \overline{U},\ 0 \leq z \leq f(x, y)\})$.

On considère $D =]a,\, b[\times]c,\, d[\subset \mathbb{R}^2$ un rectangle dans le plan tel que $U \subset D$. On divise D dans des "petits rectangles" : pour tous $M, N \in \mathbb{N}^*$ assez grands on pose $\Delta x = \frac{b-a}{M}$ et $\Delta y = \frac{d-c}{N}$ et on considère les points

$$x_i = a + i\Delta x, \quad i = 0, \cdots M \qquad \text{et} \qquad y_j = c + j\Delta y, \quad j = 0, \cdots N.$$

Pour tout $i = 0, \cdots M-1$ et $j = 0, \cdots N-1$ nous notons par $D_{i,j}$ le rectangle $]x_i,\ x_{i+1}[\times]y_j,\ y_{j+1}[$. Nous notons aussi

$$A = \{(i,j) \in \{0, 1, \cdots M-1\} \times \{0, 1, \cdots N-1\}, \quad D_{i,j} \subset U\}$$

et nous formons les **sommes de Rieman** pour l'intégrale double :

$$S_{M,N} = \sum_{(i,j)\in A} \Delta x\, \Delta y\, f(x_i, y_j).$$

Par définition l'intégrale double $\int\int_U f(x,y)\, dxdy$ est la limite pour $M, N \to +\infty$ de $S_{M,N}$. Il y a une définition plus générale du fait qu'une fonction $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ (non nécessairement continue) est intégrable sur U ; cette définition ne sera pas donnée ici.
Rappel : Pour un ensemble $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et borné l'aire de U ou de $\overline{U}$, notée $Aire(U)$ ou $Aire(\overline{U})$, est égale par définition à l'intégrale sur $\overline{U}$ de la fonction constante 1, donc

$$Aire(U) = Aire(\overline{U}) = \int\int_U 1 dxdy.$$

Dans la suite nous donnons une manière simple de calculer une intégrale double, par une succession des intégrales simples, en utilisant la **formule de Fubini.**
Nous donnons sans preuve le résultat suivant :

Théorème 1.1. *(formule de Fubini 2D)*
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert et borné et $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ nous notons

$$U_y = \{x \in \mathbb{R}, \quad (x,y) \in U\}.$$

Nous introduisons l'ensemble

$$I = \{y \in \mathbb{R}, \quad U_y \neq \emptyset\}.$$

Nous supposons que pour tout $y \in I$ l'ensemble U_y est soit un intervalle ouvert et borné soit une union finie et disjointe des intervalles ouverts et bornés. Nous faisons la même hypothèse pour l'ouvert I.
Alors la fonction f est intégrable sur U si et seulement si la fonction $y \in I \ \mapsto\ \int_{U_y} f(x,y)\, dx \in \mathbb{R}$ existe et est intégrable sur I ; dans ce cas on a l'égalité

$$\int\int_U f(x,y)\, dxdy = \int_I \left[\int_{U_y} f(x,y)\, dx\right] dy.$$

Remarque 1.12. 1. *Rappellons que l'intégrale sur une union finie et disjointe des intervalles est égale à la somme des intégrales sur chacun des intervalles.*

2. *Dans le théorème précédent nous pouvons inverser les roles des x et de y.*

Exemple : Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < 2, \quad 0 < y < x^2\}$ et calculons $\int\int_U x\, y dx dy$.
Nous avons $U_y = \emptyset$ si $y \notin]0, 4[$ et $U_y =]\sqrt{y}, 2[$ si $y \in]0, 4[$, donc $I =]0, 4[$.
On a le calcul suivant pour tout $y \in]0, 4[$:

$$\int_{U_y} x\, y dx = y \int_{\sqrt{y}}^{2} x\, dx = \frac{y}{2}(4 - y).$$

Nous avons ensuite

$$\int_I \frac{y(4-y)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^4 (4y - y^2)\, dy = \frac{16}{3}$$

et le théorème de Fubini permet de déduire que la fonction xy est intégrable sur $\overline{U}$ et que $\int\int_U x\, y dx dy = 16/3$.

Nous pouvons inverser les roles de x et y :
pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous introduisons $U_x = \{y \in \mathbb{R}, \quad (x, y) \in U\}$
et ensuite $J = \{x \in \mathbb{R},\ U_x \neq \emptyset\}$.
Nous avons alors $U_x = \emptyset$ si $x \notin]0, 2[$ et $U_x =]0, x^2[$ si $x \in]0, 2[$, donc $I =]0, 2[$.
On a le calcul suivant pour tout $x \in]0, 2[$:

$$\int_{U_x} x\, y dy = x \int_0^{x^2} y\, dy = x^5/2.$$

Nous avons ensuite

$$\int_I \frac{x^5}{2}\, dx = \int_0^2 \frac{x^5}{2}\, dx = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

et on retrouve $\int\int_{\overline{U}} x\, y dx dy = 16/3$.

1.3.2 Rappels intégrales triples et multiples

Il y a pour la définition une analogie parfaite entre les intégrales doubles et les intégrales triples.
On considère maintenant $U \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble ouvert et borné et $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale triple (dont on admet l'existence) de f sur U, notée
$\int\int\int_U f(x, y, z)\, dx dy dz \in \mathbb{R}$ se défint de manière suivante : on considère $D = [a,\ b] \times [c,\ d] \times [e, h] \subset \mathbb{R}^3$ un parallélépipède dans l'espace tel que $U \subset D$. On divise D dans des "petits parallélépipèdes" : pour tous $M, N, P \in \mathbb{N}^*$ assez grands on pose $\Delta x = \frac{b-a}{M}$, $\Delta y = \frac{d-c}{N}$ et $\Delta z = \frac{h-e}{P}$ et on considère les points

$$x_i = a + i\Delta x \quad i = 0, \cdots M, \quad y_j = c + j\Delta y \quad j = 0, \cdots N \quad \text{et} \quad z_k = e + k\Delta z \quad k = 0, \cdots P.$$

Pour tout $i = 0, \cdots M-1$, $j = 0, \cdots N-1$ et $k = 0, \cdots P-1$ nous notons par $D_{i,j,k}$ le parallélépipède $]x_i,\ x_{i+1}[\times]y_j,\ y_{j+1}[\times]z_k,\ z_{k+1}[$. Nous notons aussi

$$A = \{(i,j,k) \in \{0,1,\cdots M-1\} \times \{0,1,\cdots N-1\} \times \{0,1,\cdots P-1\}, \quad D_{i,j,k} \subset U\}$$

et nous formons les **sommes de Rieman** pour l'intégrale triple :

$$S_{M,N,P} = \sum_{(i,j,k)\in A} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z f(x_i, y_j, z_k).$$

Par définition l'intégrale triple $\int\int\int_U f(x,y)\, dxdy$ est la limite pour $M, N, P \to +\infty$ de $S_{M,N,P}$.

Il y a aussi pour l'intégrale triple une définition plus générale du fait qu'une fonction $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ (non nécessairement continue) est intégrable sur $\overline{U}$, définition qui ne sera pas donnée ici.

Rappel : Pour un ensemble $U \subset \mathbb{R}^3$ ouvert et borné le volume de U ou de $\overline{U}$, notée $Vol(U)$ ou $Vol(\overline{U})$, est égale par définition à l'intégrale sur U de la fonction constante 1, donc

$$Vol(U) = Vol(\overline{U}) = \int\int\int_U 1 dxdy.$$

Il y a aussi une version de la formule de Fubini pour l'intégrale triple, formule qui réduit le calcul d'une intégrale triple au calcul d'une intégrale double suivi d'une intégrale simple :

Théorème 1.2. *(formule de Fubini 3D)*
Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble ouvert et borné et $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout $z \in \mathbb{R}$ nous notons

$$U_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \in U\}.$$

et nous introduisons l'ensemble

$$I = \{z \in \mathbb{R}, \quad U_z \neq \emptyset\}.$$

Nous supposons que pour tout $z \in I$ l'ensemble U_z est ouvert et que I est soit un intervalle ouvert, soit une union finie et disjointe des intervalles ouverts.

Alors la fonction f est intégrable sur U si et seulement si la fonction $z \in I \mapsto \int\int_{U_z} f(x,y,z)\, dxdy \in \mathbb{R}$ existe et est intégrable sur I. On a alors l'égalité

$$\int\int\int_U f(x,y,z)\, dxdydz = \int_I \left[\int\int_{U_z} f(x,y,z)\, dxdy\right] dz$$

Remarque 1.13.

1. *En utilisant pour l'intégrale double de la formule précédente la formule de Fubini 2D du Théorème 1.1 on peut réduire le calcul de l'intégrale triple à une succession de trois intégrales simples.*
2. *Ici aussi on peut inverser les roles des variables : on peut appliquer le Thérème 1.2 avec x à la place de z et (y,z) à la place de (x,y), ou encore avec y à la place de z et (x,z) à la place de (x,y).*

Il est clair que ces notions d'intégrale double ou triple se généralise de manière naturelle à des intégrales **multiples** pour des fonctions avec un nombre arbitraire $n \in \mathbb{N}^*$ des variables.

Remarque 1.14. *Pour les intégrales doubles ou triples sur un ensemble U en $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou $n = 3$ et une fonction $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ on peut utiliser la notation plus simple $\int_U f(x)\, dx$ au lieu des notations $\int\int$ ou $\int\int\int$. En fait cette notation $\int_U f(x)\, dx$ peut s'utiliser pour une intégrale multiple générale ; il faut alors utiliser pour un vecteur en $\mathbb{R}^n$ la notation $x = (x_1, \cdots x_n)$.*

Comme pour une intégrale "simples" il y a pour les intégrales multiples une formule de changement des variables donnée par le résultat suivant (résultat admis) :

Théorème 1.3. *(Formule de changement des variables) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ une fonction de classe C^1 satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *φ est bijective*
2. *$J_\varphi(x)$ est une matrice inversible pour tout $x \in U$*
   (c'est à dire $\det(J_\varphi(x)) \neq 0 \quad \forall\, x \in U$).

Considérons une fonctions $f : V \to \mathbb{R}$ et la fonction $g : U \to \mathbb{R}$ obtenue de f par la formule

$$g = (f \circ \varphi)\, |\det(J_\varphi)|$$

Alors f est intégrable sur V si et seulement si g est intégrable sur U et on a

$$\int_V f(x)dx = \int_U g(y)dy.$$

1.3.3 Intégrales de surface

Intégrales sur des surfaces de classe C^1

Dans ce paragraphe nous considérons $(\overline{D}, \gamma)$ une **nappe paramétrée** de classe C^1 en $\mathbb{R}^3$, avec D un ouvert en $\mathbb{R}^2$ et $\Sigma = \gamma(\overline{D})$ sa surface associée. Nous notons par p et q les fonctions continues définies sur $\overline{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ définies par

$$p = p(u,v) = \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \quad \forall\, (u,v) \in \overline{D}$$

et

$$q = q(u,v) = \frac{\partial \gamma}{\partial v}, \quad \forall\, (u,v) \in \overline{D}.$$

Pour tout $(u,v) \in \overline{D}$ tel que $\gamma(u,v)$ est régulier on note par ν le vecteur normal défini par

$$\nu = \nu(u,v) = \frac{p \times q}{\|p \times q\|}.$$

Remarque 1.15. *Si la nappe paramétrée $(\overline{D}, \gamma)$ est simple, alors*

1. *on peut confondre γ et sa surface Σ associée (à laquelle on "ajoute" une orientation de la normale ν)*
2. *on peut voir ν comme une fonction définie sur la surface Σ au lieu de la voir comme une fonction définie sur $\overline{D}$. Plus précisément, pour tout $x \in \overline{D}$ on peut poser $\tilde{\nu}(x) = \nu(u, v)$ où (u, v) est l'unique élément tel que $x = \gamma(u, v)$; mais par commodité on va noter ν au lieu de noter $\tilde{\nu}$; on peut alors "confondre" ν et $\tilde{\nu}$.*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble ouvert, tel que la surface associée à $(\overline{D}, \gamma)$ soit incluse dans Ω, c'est à dire

$$\gamma(\overline{D}) \subset \Omega.$$

On a la définition suivante :

Définition 1.18. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs scalaires. On appelle* **l'intégrale de surface** *de f sur γ noté $\int_\gamma f(x)\, d\sigma$ ou $\int_\Sigma f(x)\, d\sigma$ le nombre réel défini (quand il existe) par*

$$\int_\gamma f(x)\, d\sigma = \int_\Sigma f(x)\, d\sigma = \int\int_D f(\gamma(u, v))\, \|(p \times q)(u, v)\|\, dudv.$$

Un exemple important d'une telle intégrale est l'aire de la surface Σ, notée $Aire(\Sigma)$ qui se définit par la formule

$$Aire(\Sigma) = \int_\Sigma 1\, d\sigma.$$

Par exemple si Σ est la sphère centrée en $\alpha \in \mathbb{R}^3$ et rayon $r > 0$, décrite par la paramétrisation de l'Exemple 1.6 nous avons comme dans l'Exemple 1.7 :

$$p \times q = r \cos\varphi[\gamma(\theta, \varphi) - \alpha].$$

Un calcul immédiat nous donne $\|\gamma(\theta, \varphi) - \alpha\| = r$ ce qui permet d'obtenir

$$\|(p \times q)(\theta,\, \varphi)\| = r^2 \cos\varphi, \quad \forall\ (\theta, \varphi) \in \overline{D}.$$

Nous avons alors

$$Aire(\Sigma) = \int\int_D r^2 \cos\varphi d\theta d\varphi = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \cdot 2\pi\, d\varphi = 4\pi r^2.$$

Un autre type d'intégrale de surface est donné dans la définition suivante :

Définition 1.19. *On suppose que la nappe paramétrée $(\overline{D}, \gamma)$ est simple et régulière. Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ une fonction à valeurs vectorielles (un champ des vecteurs). On appelle* **flux** *de g à travers la surface γ (ou Σ) noté $\int_\gamma g(x) \cdot \nu\, d\sigma$ ou $\int_\Sigma g(x) \cdot \nu\, d\sigma$ le nombre réel défini (quand il existe) par*

$$\int_\gamma g(x) \cdot \nu\, d\sigma = \int_\Sigma g(x) \cdot \nu\, d\sigma = \int\int_D g(\gamma(u, v)) \cdot \nu(u, v)\, \|(p \times q)(u, v)\|\, dudv.$$

Remarques :

1. On utilise ici la convention de la Remarque 1.15 qui consiste à considérer ν comme une fonction de $x \in \Sigma$ ou comme une fonction de (u, v).
2. En fait le flux de g n'est autre que l'intégrale de surface de la fonction $g \cdot \nu$ définie sur Σ.

Exemple : Pour un fluide incompressible de densité constante supposée égale à 1 le débit du fluide à travers la surface Σ à un instant de temps donné est par définition le flux de la vitesse à travers Σ. Donc si $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est la vitesse du fluide, où $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un ensemble ouvert tel que $\Sigma \subset \Omega$, alors le débit D du fluide à travers Σ est donné par la formule

$$D = \int_\Sigma v(x) \cdot \nu d\sigma.$$

Remarque générale : Pour toutes les types d'intégrales vues dans ce chapitre (intégrales doubles, triples, de surface pour une fonction scalaire ou flux d'un champ de vecteurs) on a la propriété de linéarité évidente :

$$\int (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \int f_1 + \alpha_2 \int f_2.$$

Intégrales sur des surfaces de classe C^1 par morceaux

Les deux types d'intégrales introduites dans le paragraph précédent peuvent s'étendre de manière naturelle au cas d'une surface de classe C^1 par morceaux.
Supposons dans ce paragraph que $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est tel que

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_k \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$$

et que $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_k$ est une paramétrisation **de classe C^1 par morceaux** de Σ. On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un ensemble non vide et ouvert, tel que $\Sigma \subset \Omega$. Considérons aussi deux fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Alors nous définissons (si elles existent) les intégrales suivantes :

1. l'intégrale de surface de f sur γ par la formule

$$\int_\gamma f(x)\, d\sigma = \int_\Sigma f(x)\, d\sigma = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(x)\, d\sigma$$

2. le flux de g sur γ par la formule

$$\int_\gamma g(x) \cdot \nu\, d\sigma = \int_\Sigma g(x) \cdot \nu\, d\sigma = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} g(x) \cdot \nu\, d\sigma.$$

1.4 Formules de passage d'un type d'intégrale à un autre

1.4.1 Formule de Green-Rieman

Nous avons le résultat suivant qui permet de réduire le calcul d'une circulation au calcul d'une intégrale double :

Théorème 1.4. *(formule de Green-Rieman)*
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert, $U \subset \Omega$ un ensemble non vide, ouvert et borné et $\Gamma = \partial U$ la frontière de U avec $\Gamma \subset \Omega$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe C^1, $f = (f_1, f_2)$.
Supposons que Γ est une courbe de classe C^1 par morceaux et soit $\gamma = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_k$, $k \in \mathbb{N}^*$ une paramétrisation de Γ. On suppose en outre que

1. *γ est simple (voir Définition 1.9)*
2. *le vecteur normal associé à la paramétrisation γ_j de classe C^1 est orienté à l'extérieur de U, pour tout $j = 1, \cdots k$.*

Alors on a

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int\int_U \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Idée de la preuve : Nous donnons une idée de la preuve dans un cas plus simple, où on suppose que l'ensemble U est de la forme :

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad a_1 \leq x_1 \leq b_1, \quad \alpha_m(x_1) \leq x_2 \leq \alpha_M(x_1)\}$$

et aussi

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad \beta_m(x_2) \leq x_1 \leq \beta_M(x_2)\}.$$

avec $\alpha_m, \alpha_M, \beta_m, \beta_M$ des fonctions de classe C^1. Nous pouvons alors écrire γ de deux manières différentes :

$$\gamma = p_m \vee p_M^O$$

ou

$$\gamma = q_m^O \vee q_M$$

avec

$$p_m(t) = (t, \alpha_m(t)) \quad \text{et} \quad p_M(t) = (t, \alpha_M(t)), \quad \forall\, t \in [a_1, b_1]$$

et

$$q_m(t) = (t, \beta_m(t)) \quad \text{et} \quad q_M(t) = (t, \beta_M(t)), \quad \forall\, t \in [a_2, b_2].$$

Le Théorème 1.1 (formule de Fubini 2D) nous donne

$$\int_U \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\, dx = \int_{a_2}^{b_2} \int_{\beta_m(x_2)}^{\beta_M(x_2)} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} [f_2(\beta_M(x_2), x_2) - f_2(\beta_m(x_2), x_2)]\, dx_2. \quad (1.3)$$

De manière analogue on obtient

$$\int_U \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\, dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{\alpha_m(x_1)}^{\alpha_M(x_1)} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\, dx_2\, dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} \left[f_1(x_1, \alpha_M(x_1)) - f_1(x_1, \alpha_m(x_1))\right] dx_1. \quad (1.4)$$

D'autre part, nous pouvons écrire par linéarité :

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_\gamma (f_1, 0) \cdot dx + \int_\gamma (0, f_2) \cdot dx$$

ce qui nous donne

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{p_m} (f_1, 0) \cdot dx - \int_{p_M} (f_1, 0) \cdot dx + \int_{q_M} (0, f_2) \cdot dx - \int_{q_m} (0, f_2) \cdot dx$$

c'est à dire, en utilisant les expressions des paramétrisations :

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_{a_1}^{b_1} f_1(t, \alpha_m(t)) \cdot dt - \int_{a_1}^{b_1} f_1(t, \alpha_M(t)) \cdot dt - \int_{a_2}^{b_2} f_2(\beta_m(t), t) \cdot dt + \int_{a_2}^{b_2} f_2(\beta_M(t), t) \cdot dt.$$

En comparant cette dernière égalité avec les égalités (1.3) et (1.4) on obtient le résultat attendu.
Cas particulier important : Dans le cas où le champ de vecteurs f provient d'un potentiel (c'est à dire, il existe $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $f = \nabla V$), en supposant en plus que V est de classe C^2 (tous les dérivées à l'ordre 2 existent et sont continues) alors on a

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

ce qui nous donne par la formule de Green-Rieman

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = 0.$$

Exemple :

1.4.2 Formule de Stokes-Ampère

Le résultat suivant permet de réduire le calcul d'une circulation sur le bord d'une surface au calcul d'un flux à travers cette surface.

Théorème 1.5. *(formule de Stokes-Ampère)*
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $D \subset \mathbb{R}^2$ des ensembles ouverts et bornés et $(\overline{D}, \gamma)$ une nappe parmétrée de classe C^1 en $\mathbb{R}^3$ simple et régulière. On note par Σ la surface associée à $(\overline{D}, \gamma)$ (c'est à dire $\Sigma = \gamma(\overline{D})$) et on suppose que $\Sigma \subset \Omega$.
Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1.
Supposons aussi que la frontière ∂D de D est une courbe de classe C^1 par morceaux et soit $\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_k$, $k \in \mathbb{N}^*$ une paramètrisation de ∂D. On suppose que

1. *φ est simple*
2. *le vecteur normal associé à la paramétrisation φ_j de classe C^1 est orienté à l'extérieur de D, pour tout $j = 1, \cdots k$.*

Considérons alors pour la frontière $\gamma(\partial D)$ de Σ la paramétrisation $\theta = \theta_1 \vee \cdots \vee \theta_k$ avec $\theta_j = \gamma \circ \varphi_j$, $j = 1, \cdots k$ (voir Remarque 1.10).

Nous avons alors l'égalité

$$\int \int_{\gamma} (\nabla \times g) \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\theta} g(x) \cdot dx.$$

ou ν est le vecteur normal à la surface.

Idée de la preuve : On va donner la preuve dans le cas plus simple $k = 1$ et $\varphi = \varphi_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. Par définition on a

$$\int_{\psi} g(x) \cdot dx = \int_a^b g((\gamma \circ \varphi)(t)) \cdot (\gamma \circ \varphi)'(t) \, dt.$$

D'autre part, en notant $y = (u, v))$, on a

$$(\gamma \circ \varphi)'(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial y_1}(\varphi(t)) \, \varphi_1'(t) + \frac{\partial \gamma}{\partial y_2}(\varphi(t)) \, \varphi_2'(t)$$

ce qui fait qu'on peut écrire la circulation sur θ comme une circulation sur φ :

$$\int_{\theta} g(x) \cdot dx = \int_{\varphi} A(y) \cdot dy$$

avec $A = (A_1, A_2)$, où on a

$$A_j(y) = g(\gamma(y)) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y_j}(y), \quad j = 1, 2.$$

On utilise maintenant la formule de Green-Rieman, ce qui donne

$$\int_{\varphi} A(y) \cdot dy = \int\int_{D} \left(\frac{\partial A_2}{\partial y_1} - \frac{\partial A_1}{\partial y_2} \right) dy.$$

D'autre part, en utilisant la définition, on écrit $\int\int_{\gamma} (\nabla \times g) \cdot \nu \, d\sigma$ comme une intégrale sur D et on montre après beaucoup des calculs que c'est exactement $\int\int_{D} \left(\frac{\partial A_2}{\partial y_1} - \frac{\partial A_1}{\partial y_2} \right) dy$; ceci montre le résultat.

1.4.3 Formule d'Ostrogradski

Le résultat suivant nous permet de réduire le calcul d'un flux au calcul d'une intégrale triple.

Théorème 1.6. *(formule d'Ostrogradski)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble non vide, ouvert et borné et soit Σ la frontière de Ω, donc $\Sigma = \partial\Omega$.
Soit $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$.
On suppose que Σ est une surface de classe C^1 par morceaux et soit $\gamma = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_k,\ k \in \mathbb{N}^*$ une paramétrisation de Σ. On suppose en outre que

1. *la paramétrisation γ est simple*
2. *pour tout $j = 1, \cdots k$ la paramétrisation γ_j est choisie de tel sorte que la normale ν à la nappe γ_j soit orientée vers l'extérieur de Ω.*

Nous avons alors l'égalité

$$\int\int\int_{\Omega} \nabla \cdot g \, dx = \int_{\gamma} g \cdot \nu d\sigma.$$

Idée de la preuve : La preuve ressemble à la preuve du Théorème 1.4. Nous écrivons encore

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3 \end{pmatrix} = g_1 e_1 + g_2 e_2 + g_3 e_3$$

où e_1, e_2, e_3 sont les vecteurs de la base canonique en $\mathbb{R}^3$. Par linéarité des intégrales, il suffit de montrer qu'on a pour tout $j = 1, 2, 3$:

$$\int\int\int_{\Omega} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} \, dx = \int_{\gamma} g_j e_j \cdot \nu d\sigma.$$

On va indiquer comment on démontre l'égalité précédente pour $j = 3$; la preuve sera analogue pour $j = 1$ ou $j = 2$.
Supposons qu'on est dans le cas particulier où le domaine Ω s'écrit

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3), \quad \theta_m(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \theta_M(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in U\}$$

avec $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné. En utilisant le Théorème 1.2 (formule de Fubini 3D) on a

$$\int\int\int_\Omega \frac{\partial g_3}{\partial x_3}\,dx = \int\int_U [g_3(x_1, x_2, \theta_M(x_1, x_2)) - g_3(x_1, x_2, \theta_m(x_1, x_2))]dx_1\,dx_2$$

et on montre que cette dernière intégrale double coincide avec l'intégrale de surface que nous voulons obtenir. Ceci permet d'obtenir le résultat.

Exemple : Si g est le champ de vecteur vitesse à un moment donné d'un fluide incompressible, alors on sait que $\nabla \cdot g = 0$ sur Ω. On déduit alors du Théorème 1.6 que le flux de v sur Σ (qui est le debit du fluide sur Σ dans le cas où la densité du fluide est constante et égale à 1) est égal à 0.

Bibliographie

B. Aebischer, *Analyse : Fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique*

G. Laville, *Courbes et Surfaces*