Polytech Lyon, Mécanique 3 2013-2014

Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 1 (OMI 1)

Examen janvier 2014

Durée 2h - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

a) Donner toutes les solutions $y(t)$ (avec leur intervalle de définition) de l'équation différentielle à variables séparées suivante:

(1)
$$y' = y(y^2 - 1), \quad t \in I\!R.$$

b) Trouver la solution de l'équation (1) satisfaisant la condition initiale
$$y(1) = \frac{1}{5}.$$

c) Trouver la solution de l'équation (1) satisfaisant la condition initiale
$$y(1) = -1.$$

Exercice 2.

On considère le système différentiel linéaire homogène: trouver $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ tel que

(2)
$$x' = Ax$$

où $A \in \mathcal{M}_3(I\!R)$ est la matrice donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Considérons aussi le système différentiel non homogène: trouver $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T$ tel que

(3)
$$y' = Ay + b$$

avec $b : I\!R \to I\!R^3$ la fonction donnée par
$$b(t) = (0, 0, 1 + t)^T \quad \forall\, t \in I\!R.$$

a) Trouver les valeurs propres de A ainsi que leurs multiplicités algébriques. La matrice A est-elle diagonalisable?

b) Donner toutes les solutions du système (2).

c) Donner une solution particulière $\tilde{y}(t) = (\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \tilde{y}_3(t))^T$ de (3).

Indication: chercher une telle solution avec $\tilde{y}_2 = 0$ et $\tilde{y}_1$ et $\tilde{y}_3$ des polynomes de degré 1.

d) Trouver la solution de (3) telle que
$$y(0) = (1, 0, 2)^T.$$

Exercice 3.
On considère la paramétrisation $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto I\!R^2$ donnée par

$$\gamma(t) = (\cos t,\ 2 \sin t) \quad \forall\, t \in [0, 2\pi]$$

(le support de γ est une ellipse dans le plan).
Soit $F : I\!R^2 \mapsto I\!R^2$ le champ de vecteurs défini par

$$F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ x_1^2) \quad \forall\, (x_1, x_2) \in I\!R^2.$$

Calculer $\int_\gamma F(x) \cdot dx$ (la circulation de F sur γ).