

Outils Mathématiques pour l'Ingénieur (OMI 1)

Partiel, octobre 2013

Durée 2h - Calculatrices interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

Considérons le système algébrique suivant: trouver $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= m \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1. \end{cases}$$

Donner les solutions de ce système suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

On considère dans le \mathbb{R} - espace vectoriel \mathbb{R}^3 les vecteurs:

$u_1 = (1, 2, a)$, $u_2 = (2, 0, 1)$, $u_3 = (5, 1, 3)$ et $u_4 = (1, 1, 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$ un paramètre.

Notons $E_1 = \text{Vect}(u_1)$ et $E_2 = \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)$.

- a) Quelles sont les dimensions de E_1 et de E_2 ?
- b) Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel qu'on a l'inclusion $E_1 \subset E_2$.
- c) On suppose dans cette partie que a est tel que E_1 n'est pas inclus dans E_2 .
 - c1) Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$
 - c2) Montrer que $E_1 \cup E_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3.

Considérons la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 4 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

- a) Calculer le polynôme caractéristique de A . Calculer ensuite les valeurs propres de A ainsi que leur multiplicités algébriques.
- b) Montrer que A est diagonalisable en \mathbb{R} et trouver une matrice diagonale semblable à A .