Corrigé Exam. Syst. Dynamiques 2010-2011

Problème 1.

a) $A - \lambda I = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 \\ \alpha & \alpha-4-\lambda \end{pmatrix}$. $\operatorname{Det}(A-\lambda I) = 0 \iff$

$\lambda^2 - 2(\alpha-2)\lambda + \alpha^2 - 5\alpha = 0$

$\Delta = 4(\alpha-2)^2 - 4(\alpha^2-5\alpha) = 4(\alpha+4)$

Cas 1. $\alpha > -4$ racines réelles et distinctes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

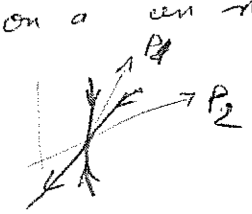
Cas 1 a) Si $\alpha^2 - 5\alpha > 0 \iff \alpha \in]-\infty, 0[\cup]5, \infty[$

alors $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ (les racines ont le même signe

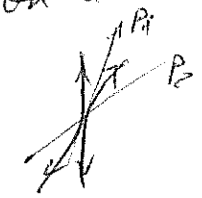
D'autre part $\lambda_1 + \lambda_2 = 2(\alpha-2)$

On a alors

$\boxed{\text{Si } a \in]-4, 0[}$ alors $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ~~donc~~ et on a un noeud stable



$\boxed{\text{Si } a \in]5, +\infty[}$ alors $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et on a un noeud instable

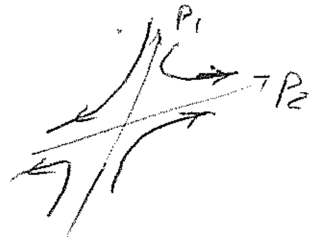


Cas 1 b) Si $\alpha^2 - 5\alpha < 0 \iff \alpha \in]0, 5[$

alors $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ (suppos $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$)

Donc

$\boxed{\text{Si } a \in]0, 5[}$ on a un point selle



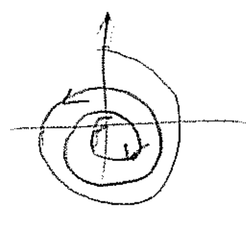
Cas 2. $\alpha < -4$ racines complexes distinctes

$\lambda_{1,2} = \alpha - 2 \pm i\sqrt{-(\alpha+4)}$

Comme $\alpha < -4$ alors $\alpha - 2 < -6 < 0$

~~Alors~~ Donc

$\boxed{\text{Si } \alpha < -4}$ on a un foyer stable



On ne peut pas avoir foyer instable

b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$

les val. propres sont les racines de $\quad : \Delta = 4$

$\lambda^2 + 10\lambda + 24 = 0$

On a alors $\lambda_1 = -6 \; : \; \lambda_2 = -4$

$A + \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \; : \; P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$A + \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \; : \; P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On pose $P = (P_1 \; P_2)$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

b1) les solutions de (2) sont avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

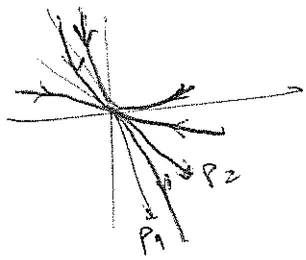
$X(t) = c_1 e^{-6t} P_1 + c_2 e^{-4t} P_2$

$y_1 = c_1 e^{-6t}$

$y_2 = c_2 e^{-4t}$

$y_1 = c\, y_2^{3/2}$

Courbes tangentes à P_2



b2) Il faut trouver c_1, c_2 tels que $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff$

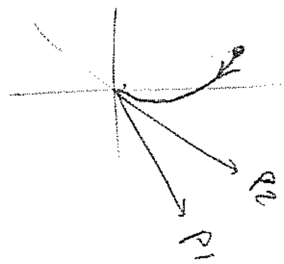
$c_1 P_1 + c_2 P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff$

$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -3c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \iff c_1 = -\frac{3}{2} \; : \; c_2 = \frac{7}{2}$

donc $X(t) = -\frac{3}{2} e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{7}{2} e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(on peut aussi utiliser e^{At})

Cette courbe est tangente (si $t \to +\infty$) à la droite de direction P_2, c'est à dire, la droite $P_2 \cdot \mathbb{R}$



b3) $Y'(t) = AY + f(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$

$f(t) = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$

On sait

$Y(t) = e^{At} Y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\,ds$

avec $Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a : $A = P \cdot D P^{-1}$ donc $e^{At} = P \cdot e^{Dt} P^{-1} \; : \; P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

avec $D = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-6t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e^{-6t}+3e^{-4t} & -e^{-6t}+e^{-4t} \\ 3e^{-6t}-3e^{-4t} & 3e^{-6t}-e^{-4t} \end{pmatrix}$$

~~Alors~~

On a : $e^{-As} f(s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e^{6s}+3e^{4s} & -e^{6s}+e^{4s} \\ 3e^{6s}-3e^{4s} & 3e^{6s}-e^{4s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -12e^{6s} + 20e^{4s} \\ 36e^{6s} - 20e^{4s} \end{pmatrix}$ donc $\int_0^t e^{-As} f(s)ds = \begin{pmatrix} -2(e^{6t}-1)+5(e^{4t}-1) \\ 6(e^{6t}-1)-5(e^{4t}-1) \end{pmatrix}$

Alors

$$y(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e^{-6t}+3e^{-4t} & -6e^{-6t}+e^{-4t} \\ 3e^{-6t}-3e^{-4t} & 3e^{-6t}-4e^{-4t} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2(e^{6t}-1)+5(e^{4t}-1) \\ 6(e^{6t}-1)-5(e^{4t}-1) \end{pmatrix}\right]$$

b4) On a $y(t) = e^{At}\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} -2e^{6t}+5e^{4t} \\ 6e^{6t}-5e^{4t} \end{pmatrix}\right]$

Mais $e^{At}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to 0$ si $t \to 0$ (car $\lambda_1, \lambda_2 < 0$)

Il reste : $e^{At}\begin{pmatrix} -2e^{6t}+5e^{4t} \\ 6e^{6t}-5e^{4t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $y(t) \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ si $t \to \infty$

b represente la solution stationnaire de (3)

Si on note $z = y - b$ $(\Leftrightarrow y = z+b)$ alors $z' = y' = Ay + \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = A(z+b) + \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$ ~~= Az + Ab +~~

donc

$z' = Az + \underbrace{Ab + \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}}_{=0}$ donc

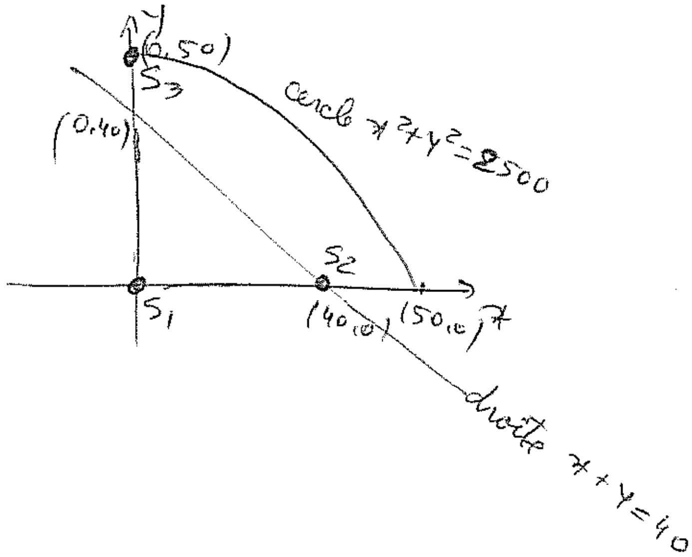
$z' = Az$.

Comme $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ alors $z(t) \longrightarrow 0$ si $t \to \infty$

on déduit donc $y(t) = b + z(t) \longrightarrow b$ si $t \to \infty$.

sans avoir besoin de calculer $y(t)$.

Problème 2.



a) Resoudre

$$\begin{cases} x(-x-y+40)=0 \\ y(-x^2-y^2+2500)=0 \end{cases}$$

On a : $x=0$ et $y=0$

ou

$x=0$ et $-x^2-y^2+2500=0 \iff \begin{cases} x=0 \\ y=50 \end{cases}$ (car $y \geq 0$)

ou

$y=0$ et $-x-y+40=0 \iff \begin{cases} x=40 \\ y=0 \end{cases}$

ou

$\begin{cases} x+y=40 \\ x^2+y^2=2500 \end{cases}$ → les solutions sont en dehors de Ω.

Donc les points d'equilibre en Ω sont $S_1=(0,0)$; $S_2=(40,0)$; $S_3=(0,50)$

la Jacobienne de $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -2x-y+40 & -x \\ -2xy & -x^2-3y^2+2500 \end{pmatrix}$

Pour S_1 on a $J = \begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 2500 \end{pmatrix}$ val. propres >0 donc instable

Pour S_2 : $J = \begin{pmatrix} -40 & -40 \\ 0 & 900 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -900 < 0$, $\lambda_2 = 40 > 0$ donc instable

Pour S_3 : $J = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -5000 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -5000 < 0$, $\lambda_2 = -10 < 0$

~~on ne peut pas se prononcer a priori~~

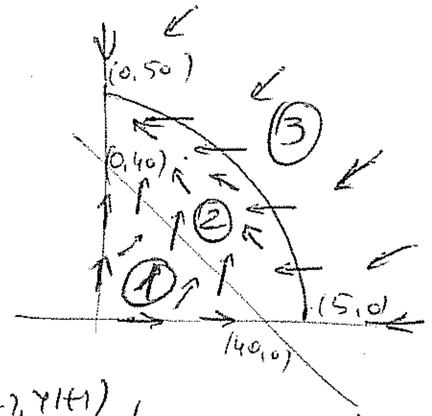
donc S_3 stable.

b) Les isoclines sont

$I_x = \{x=0\} \cup \{x+y=40\}$ restreinte à Ω

$I_y = \{y=0\} \cup \{x^2+y^2=50^2\}$ restreinte à Ω.

c) et d)



Si $\binom{x_0}{y_0} \in$ zone ① alors $(x(t), y(t))$ va traverser $\{x+y=40\}$ va entrer en zone ② ensuite va converger vers $(0, 50)$

Si $\binom{x_0}{y_0} \in$ zone ② $\longrightarrow$ $(x(t), y(t))$ reste en zone ② et converge vers $(0, 50)$

Si $(x_0, y_0) \in$ zone ③ alors $(x(t), y(t))$ soit conv. vers $(0, 50)$ soit il entre en zone ② et ensuite conv. vers $(0, 50)$

Exception : si ~~x_0~~ $y_0 = 0 \Rightarrow (x(t), y(t))$ va rester sur la droite $\{y=0\}$ et va converger vers $(40, 0)$.

la zone ② est un <u>entonnoir</u>

<u>Problème 3.</u>

a) les points d'équilibre sont $S_1 = \binom{1}{0}$ et $S_2 = \binom{0}{0}$

La Jacobienne J de $\binom{f}{g}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1-2x & 0 \end{pmatrix}$

en S_1 on a : $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda^2 + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 2i$

on ne peut pas se prononcer sur la stabilité de S_1

en S_2 on a $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda^2 - 2 = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

S_2 est <u>instable</u>

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 + 0 = 0$ donc (S) est Hamiltonien

$\dfrac{\partial E}{\partial y} = 2y \iff E(x, y) = y^2 + c(x)$

$-\dfrac{\partial H}{\partial x} = -c'(x) = x - x^2 \Rightarrow$

$c(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

Prendre

$E(x,y) = y^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

donc E est conservée pour (5)

c) Lignes de niveau de E : $L_c = \{(x,y) : y^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = c\}$

$y^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = c$: On essaye

$y = \pm\sqrt{c + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3}$

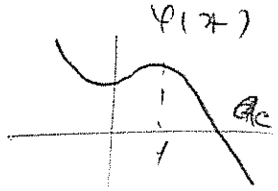
Il faut ≥ 0

Considérer $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(x) = c + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$

$\varphi'(x) = x - x^2$

tableau de variation de φ.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$- -$	0	$+ +$	0	$- -$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	c	$\nearrow$	$c + \frac{1}{6}$	$\searrow$	$-\infty$

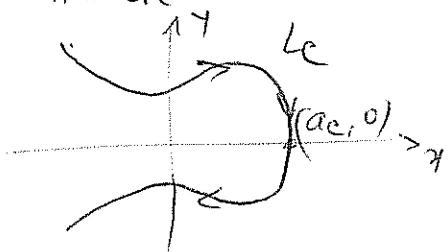


Cas 1. $c > 0$

$\exists\, a_c > 1$ t.q.

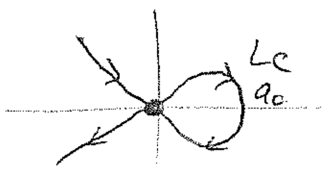
$\varphi(x) > 0 \iff x < a_c$

Alors



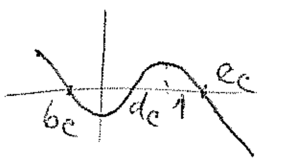
pas de point stationnaires sur L_c.

Cas 2. $c = 0$



Il y a $(0,0)$ point stationnaire sur L_c.

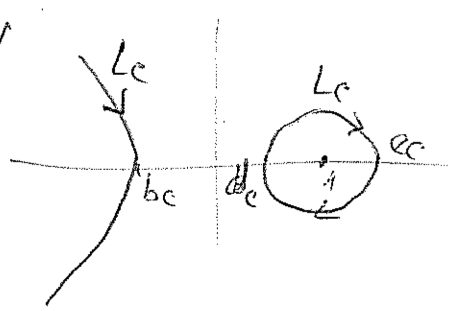
Cas 3. $-\frac{1}{6} < c < 0$



$\exists\, b_c < 0$; $d_c \in]0,1[$; $e_c > 1$

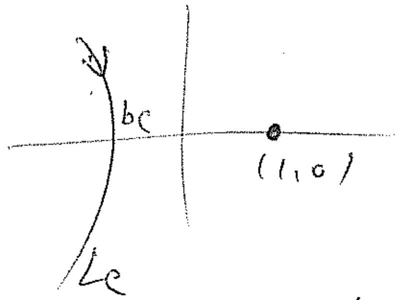
t.q. $\varphi(x) > 0 \iff x \in]-\infty, b_c[\cup]d_c, e_c[$

L_c est l'union de deux courbes



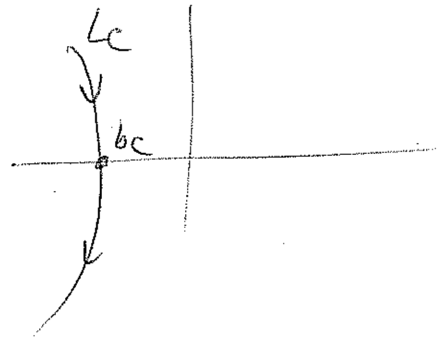
On a alors une solution periodique qui correspond à la ~~p~~ partie de droite de L_c.

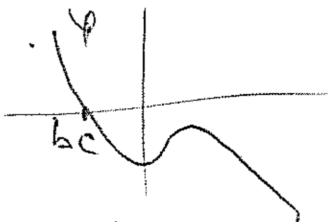
<u>Cas 4.</u> $c = -\frac{1}{6}$



La partie de droite de la courbe L_c se reduit au point stationnaire $(1,0)$

<u>Cas 5.</u> $c < -\frac{1}{6}$

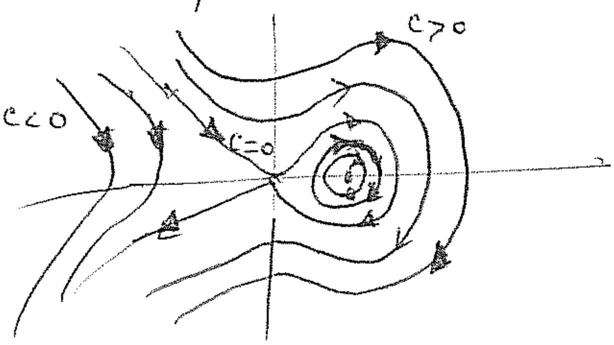




$\exists\, b_c < 0$ t.q.

$\varphi(x) > 0 \iff x < b_c$

le portrait de phase est donc



d) La solution $(1,0)$ est neutralement <u>stable</u>.