Corrigé Exam. Syst. Dynamiques 2011 - 2012

Problème 1.

$\boxed{a)}$ $A-\lambda I = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 \\ \alpha & \alpha-4-\lambda \end{pmatrix}$. $\quad \det(A-\lambda I)=0 \iff$

$\lambda^2 - 2(\alpha-2)\lambda + \alpha^2 - 5\alpha = 0$

$\Delta = 4(\alpha-2)^2 - 4(\alpha^2-5\alpha) = 4(\alpha+4)$

Cas 1. $\alpha > -4$ racines réelles et distinctes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

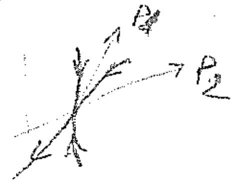
Cas 1 a) Si $\alpha^2 - 5\alpha > 0 \iff \alpha \in]-\infty, 0[\cup]5, \infty[$

alors $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ (les racines ont le même signe

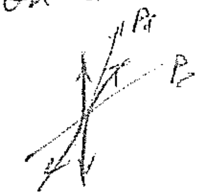
D'autre part $\lambda_1 + \lambda_2 = 2(\alpha-2)$

On a alors

$\boxed{\text{Si } \alpha \in]-4, 0[}$ alors $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ~~donc~~ et on a un noeud stable



$\boxed{\text{Si } \alpha \in]5, +\infty[}$ alors $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et on a un noeud instable

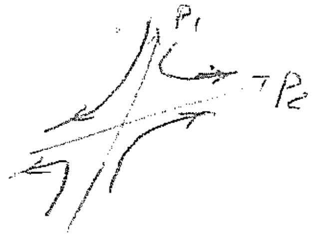


Cas 1 b) Si $\alpha^2 - 5\alpha < 0 \iff \alpha \in]0, 5[$

alors $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ (suppos $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$)

Donc

$\boxed{\text{Si } \alpha \in]0, 5[}$ on a un point selle



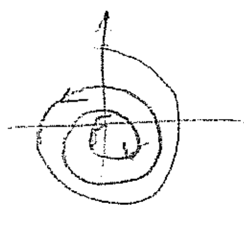
Cas 2. $\alpha < -4$ racines complexes distinctes

$\lambda_{1,2} = \alpha - 2 \pm i\sqrt{-(\alpha+4)}$

Comme $\alpha < -4$ alors $\alpha - 2 < -6 < 0$

~~Alors~~ Donc

$\boxed{\text{Si } \alpha < -4}$ on a un foyer stable



On ne peut pas avoir foyer instable

b) $\boxed{b1)}$ $A = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 1 \\ \frac{9}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$

les valeurs propres de cette matrices sont les racines λ_1, λ_2 de l'équation $\lambda^2 - 2(\alpha-2)\lambda + \alpha^2 - 5\alpha = 0$

avec $\alpha = 9/4$ Alors ~~$\Delta = \alpha - 2$~~ $\Delta = 4(\alpha+4) = 25$

les racines sont $\lambda_1 = -\frac{9}{4}$; $\lambda_2 = \frac{11}{4}$

$A - \lambda_1 I = A + \frac{9}{4} I = \begin{pmatrix} 9/2 & 1 \\ 9/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

On choisit $P^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre de A associé à λ_1.

$A - \lambda_2 I = A - \frac{11}{4} I = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 9/4 & -9/2 \end{pmatrix}$

On choisit $P^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre de A associé à λ_2.

On pose $P = [P^{(1)}, P^{(2)}] = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$ matrice inversible

On a alors $P^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$

~~On a~~ On pose aussi $D = \begin{pmatrix} -9/4 & 0 \\ 0 & 11/4 \end{pmatrix}$ et on a

~~$A = PDP^{-1}$~~

$A = PDP^{-1}$

L'équation (1) s'écrit

$X' = PDP^{-1}X$. On fait le changement d'inconnue ~~$X = PY$~~ $X(t) = PY(t)$

ce qui donne

$PY' = PDP^{-1}PY \Rightarrow$

$Y' = DY$

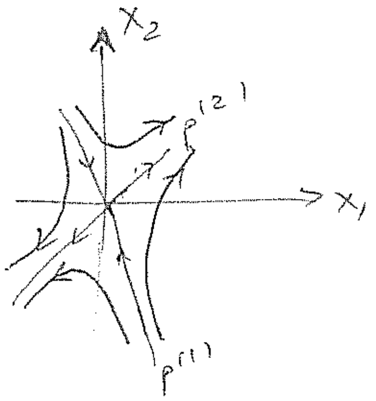
Ceci donne $Y(t) = e^{Dt}c$ avec $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ donc

$Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-9/4 t} \\ c_2 e^{\frac{11t}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \exp(-\frac{9}{4}t) \\ c_2 \exp(\frac{11}{4}t) \end{pmatrix}$

Alors $X(t) = [P^{(1)}, P^{(2)}]\, Y(t)$ donc

$X(t) = c_1 P^{(1)} \exp(-\frac{9}{4}t) + c_2 P^{(2)} \exp(\frac{11}{4}t)$

Portrait de phase :

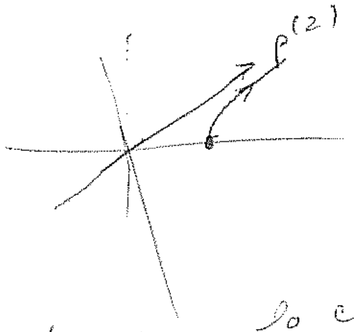


$\boxed{b2)}$ Avec le changement d'inconnue $X = PY$ tout revient à résoudre en Y :

$$\begin{cases} Y' = DY \\ Y(0) = P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/20\\9/20\end{pmatrix}\end{cases}$$

Alors $Y(t) = e^{Dt}Y(0) = \left(\frac{1}{20}\exp\left(-\frac{9}{4}t\right), \frac{9}{20}\exp\left(\frac{11}{4}t\right)\right)^T$ ce qui donne

$$X(t) = \left[p^{(1)}, p^{(2)}\right] Y(t) = \frac{1}{20}\exp\left(-\frac{9}{4}t\right)p^{(1)} + \frac{9}{20}\exp\left(\frac{11}{4}t\right)p^{(2)}$$



Pour $t \to +\infty$ la courbe $X(t)$ est tangente à la droite de direction $p^{(2)}$ (droite $\{\alpha p^{(2)}, \alpha \in \mathbb{R}\}$)

$\boxed{b3)}$ Du point b1) nous avons

$$X(t) = c_1 p^{(1)}\exp\left(-\frac{9}{4}t\right) + c_2 p^{(2)}\exp\left(\frac{11}{4}t\right)$$

Il est clair que $X(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ ssi $c_2 = 0$

(car $\forall c_1 \in \mathbb{R}$ $c_1 p^{(1)}\exp\left(-\frac{9}{4}t\right) \to 0$ si $t \to \infty$)

Mais c_1, c_2 sont tels que $P\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = X^0$

$\cancel{\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = P^{-1}X^0}$ $(\Leftrightarrow X^0 = c_1 p^{(1)} + c_2 p^{(2)})$

Comme $c_2 = 0$ on déduit $X^0 = c_1 p^{(1)}$

Donc $X^0 \in \{c_1 p^{(1)}, c_1 \in \mathbb{R}\}$ = la droite de direction $p^{(1)}$.

$\boxed{b4)}$ En utilisant de nouveau le changement d'inconnue $X = PY$ on écrit (3)-(4) sous la forme

$$\begin{cases} PY' = PDP^{-1}PY + \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} \\ PY(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -18 \end{pmatrix} \end{cases}$$

En multipliant à gauche par P^{-1} on déduit

$$\begin{cases} Y' = DY + P^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} \\ Y(0) = P^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ -18 \end{pmatrix} \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} Y' = DY + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On arrive à deux pb. de Cauchy découplés :

$$\begin{cases} y_1' = -\frac{9}{4} y_1 + 1 \\ y_1(0) = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_2' = \frac{11}{4} y_2 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Ceci donne : $y_2(t) = 0$

$$y_1(t) = 2e^{-\frac{9}{4}t} + e^{-\frac{9}{4}t} \underbrace{\int_0^t e^{\frac{9}{4}s}\,ds}_{= \frac{4}{9}(e^{\frac{9}{4}t} - 1)} \quad \text{donc}$$

$$y_1(t) = \frac{4}{9} + \frac{14}{9} e^{-\frac{9}{4}t}.$$

Donc $X(t) = \left(\frac{4}{9} + \frac{14}{9} e^{-\frac{9}{4}t}\right) P^{(1)}$

En fait X est colinéaire à $P^{(1)}$ car $X(0)$ et f le sont

pour $t \to +\infty$

Alors $X(t) \to \frac{4}{9} P^{(1)} = \begin{pmatrix} 8/9 \\ -4 \end{pmatrix} \equiv b$

En fait b = la solution stationnaire du système (3)

$\left(\text{car } Ab + \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} = 0\right)$

Problème 2.

$\boxed{a)}$ Résoudre
$$\begin{cases} x(-x - y + 10) = 0 \\ y(-x^2 - y^2 + 16) = 0 \end{cases}$$

Ceci donne
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -x - y + 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 - y^2 + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

On obtient alors trois points stationnaires en Ω :
$S_1=(0,0)$; $S_2=(10,0)$; $S_3=(0,4)$
(le dernier système ne donne pas de solutions)
La matrice Jacobienne J de $\binom{f}{g}$ est

$$J(x,y)=\begin{pmatrix} -2x-y+10 & -x \\ -2xy & -x^2-3y^2+16 \end{pmatrix}$$

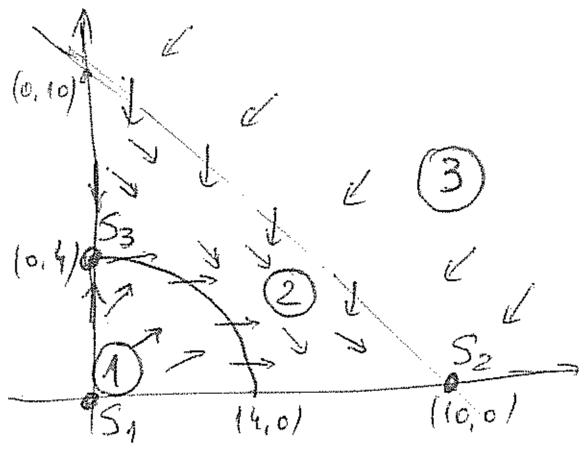
$$J(S_1)=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$ val. propres 10 et 16 donc S_1 est <u>instable</u>

$$J(S_2)=\begin{pmatrix} -10 & -10 \\ 0 & -84 \end{pmatrix}$$ val. propres -10 et -84 donc S_2 est <u>asympt. stable</u>

$$J(S_3)=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix}$$ val. propres 6 et -32 donc S_2 est instable

b) Les isoclines ~~sont~~ en Ω sont :
$I_x=\{x=0\}\cup\{x+y=10 : x\geq 0,\ y\geq 0\}$
$I_y=\{y=0\}\cup\{x^2+y^2=16 : x\geq 0,\ y\geq 0\}$

c) et d)



Zone 1 : $\{x^2+y^2\leq 16\}\cap\Omega$
Zone 2 : $\{16\leq x^2+y^2\}\cap\{x+y\leq 10\}\cap\Omega$.
Zone 3 : $\{x+y>10\}\cap\Omega$.

Si $(x_0,y_0)\in$ zone 1 alors $(x(t),y(t))$ va traverser $\{x^2+y^2=16\}$ va entrer en zone 2 et va converger vers $(10,0) = S_3$

Si $(x_0, y_0) \in$ zone ② $\Rightarrow (x(t), y(t))$ reste en zone ② et converge vers $(10, 0)$ (la zone ② est un <u>entonnoir</u>)

Si $(x_0, y_0) \in$ zone ③ alors soit $(x(t), y(t))$ reste en zone ③ et converge vers $(10, 0)$ soit $(x(t), y(t))$ va entrer en zone ② et y reste en convergeant vers $(10, 0)$.

<u>Problème 3.</u>

a) Resoudre $\begin{cases} x(1-y) = 0 \\ y(x-2) = 0 \end{cases}$ Ceci donne

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ 2 solutions stationnaires

b) $\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt} \left[F(x(t)) + G(y(t)) \right] =$

$= F'(x(t))\, x'(t) + G'(y(t)) \cdot y'(t) =$

$= F'(x)\, x(1-y) \quad + G'(y)\, y(x-2)$

Si $F'(x)\, x = x - 2$ et $G'(y)\, y = y - 1$ alors

$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = (x-2)(1-y) + (y-1)(x-2) = 0$

Choisir $F(x) = x - 2\log x$

Alors $F'(x) = 1 - \frac{2}{x}$

Choisir $G(y) = y - \log y$

$G'(y) = 1 - \frac{1}{y}$

Donc

$E :]0, \infty[^2 \to \mathbb{R}$

$E(x, y) = x - 2\log x + y - \log y$

c) Le seul point d'equilibre de U est $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La ligne le niveau α de E est

$L_\alpha = \{(x, y) \in U : E(x, y) = \alpha\}$

On cherchera à trouver y en fonction de x dans l'équation $E(x,y)=\alpha$

Ceci donne

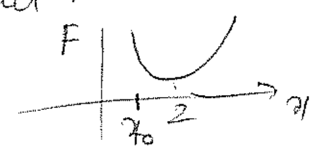
$G(y) + F(x) = G(y_0) + F(x_0)$ donc

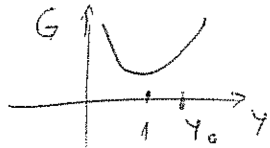
(1)' $G(y) = G(y_0) + F(x_0) - F(x)$

Faisons le tableau de variation de F et ~~g~~ G.

x	0	2	$+\infty$
$F'(x)$	$- -$	0	$+ \; +$
$F(x)$	$\searrow$	$F(2)$	$\nearrow$

F strictement décroissante sur $]0,2[$ et strict. croissante sur $]2,\infty[$





Pareil pour G

$G \searrow$ sur $]0,1[$ et $G \nearrow$ sur $]1,\infty[$

Pour avoir des solutions de (1)' il faut que le membre de droite de (1)' soit $>$ ~~$G(y_0)$~~ $G(1)$

donc $G(y_0) + F(x_0) - F(x) > G(1)$ $\Leftrightarrow$

(2)' $F(x) <$ ~~$F(x_0) + G(y_0) - G(1)$~~ β

$F(x_0) + G(y_0) - G(1)$

avec $\beta =$ ~~$F(x_0) + G(y_0) - G(1) - F(1) =$~~

D'autre part, ~~$\beta - F(1) = F(x_0) + G(y_0) - G(1)$~~ > 0

$\Rightarrow \beta - F(2) = F(x_0) - F(2) + G(y_0) - G(1)$ et

car $F(x_0) \geq F(2)$, $G(y_0) \geq G(1)$ (car $(x_0, y_0) \neq (2,1)$)

$F(x_0) > F(2)$ ou $G(y_0) > G(1)$

Donc $\beta > F(2)$

Alors $\exists\, x_1 \in]0,2[$ et $x_2 \in]2,\infty[$ tels que

(2)' est satisfaite si et seulement si $x \in]x_1, x_2[$ ~~si et seulement si~~

Alors (1)' a 2 solutions qu'on va noter

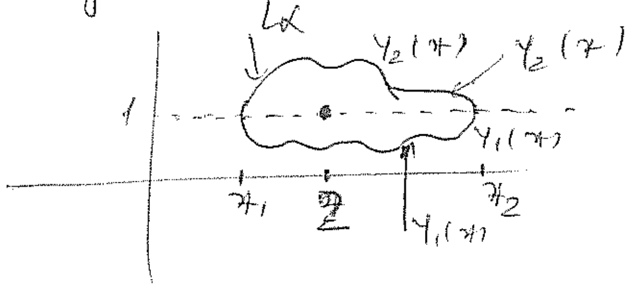
si $x \in]x_1, x_2[$

$y_1(x) < 1$ et $y_2(x) > 1$

~~et une seule~~ (car le membre de droite de (1)' est $> G(1)$ dans ce cas) et (1)' a une seule solution (qui est = 1) si $x \in \{x_1, x_2\}$

(1)' n'a aucune solution si $x \in R - [x_1, x_2]$

Alors la ligne de niveau de E est :



~~En utilisant le théorème~~ ~~et ceci fait une courbe~~ fermé ~~comme ligne~~ de ~~niveau~~ ~~α de~~ ~~E~~.

Donc L_α est une courbe fermée car le L_α ne contient pas des points d'équilibre en U est (2.1) seule point d'équilibre et ~~$y_1(2)$~~, ~~$y_2(1)$~~ $y_1(2) \neq 1$; $y_2(2) \neq 1$.

Alors ~~toute~~ la ~~trajectoire~~ solution $(x(t), y(t))$ reste sur L_α et est périodique (conséquence d'un resultat vu en cours)

<u>Remarque</u>- Il n'y a pas de discontinuités sur la courbe L_α car ceci contredirait la continuité en t de la solution $(x(t), y(t))$

En fait en utilisant le théorème des fonctions implicites on peut montrer que $y_1(x)$, $y_2(x)$ sont de classe C^1 sur $]x_1, x_2[$ (hors cadre!) ~~de co~~