Université Claude Bernard, Lyon 1 Master SITN, Mathématiques

Examen Systèmes dynamiques, 2010-2011

durée 3h, une feuille de notes manuscrites authorisée

Problème 1.
Soit A la matrice carrée réelle

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha - 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre et considérons le système différentiel linéaire:
trouver $X = (X_1, X_2)^T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que

$$X'(t) = AX(t), \quad t \geq 0. \tag{2}$$

a) Déterminer les valeurs de α pour lesquels le point stationnaire 0 du système (2) est:
- un noeud stable,
- un noeud instable,
- un foyer stable,
- un foyer instable,
- un point selle.

b) On suppose dans cette partie que $\alpha = -3$.

b1) Déterminer toutes les solutions du système (2) et tracer les courbes solutions (portrait de phase) dans le plan (X_1, X_2).

b2) Résoudre le système (2) avec la condition initiale

$$X(0) = (2, 1)^T$$

et tracer la courbe solution $\{X(t),\ t \geq 0\}$ dans le plan (X_1, X_2). Montrer que pour $t \to +\infty$ cette courbe est tangente à une droite à déterminer.

b3) Résoudre le système linéaire non-homogène suivant, d'inconnue $Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t))^T$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y_1' & = & -3Y_1 + Y_2 + 8 \\ Y_2' & = & -3Y_1 - 7Y_2 + 16 \end{array} \right. \tag{3}$$

avec condition initiale

$$Y(0) = (2, 1)^T.$$

b4) Montrer que la solution $Y(t)$ de (3) converge, pour $t \to +\infty$, vers une constante $b \in \mathbb{R}^2$ à calculer. Que représente cette constante b pour le système (3)? Pouvait-on prévoir cette convergence sans calculer $Y(t)$? Justification.

Problème 2.
On considère le système différentiel non-linéaire en dimension 2:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & x(-x - y + 40) \\ \\ \frac{dy}{dt} & = & y(-x^2 - y^2 + 2500) \end{array} \right. \tag{4}$$

Nous considérons l'ensemble

$$\Omega = \{(x, y) \in I\!R^2,\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

a) Trouver les points d'équilibre appartenant à Ω du système (4). Etudier la stabilité de ces points d'équilibre.
b) Trouver et tracer les $x-$ isocline et $y-$ isocline qui sont dans Ω, du système (4).
c) Déterminer le sense de variation dans Ω de $x(t)$ et $y(t)$ et tracer le portrait de phase dans Ω du système (4).
d) Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$ et $(x(t), y(t))$ solution de (4) avec condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ (on admet l'existence et l'unicité d'une telle solution pour $t \geq 0$). Justifier, en utilisant le portrait de phase, que $(x(t), y(t)) \in \Omega \quad \forall t \geq 0$ et que $(x(t), y(t))$ tend toujours vers un point d'équilibre de (4) pour $t \to +\infty$.

Problème 3.
On considère le système différentiel non-linéaire en dimension 2:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \\ \frac{dy}{dt} = x - x^2. \end{cases} \tag{5}$$

a) Trouver les solutions stationnaires de ce système et étudier leur stabilité. Montrer qu'il y a une solution stationnaire (notons la par S_1) pour laquelle on ne peut pas se prononcer *a priori* sur sa stabilité.
b) Montrer que le système (5) est conservatif et déterminer une quantité (fonction) conservée qu'on notera $E(x, y)$.
c) Déterminer les lignes de niveau de E et tracer le portrait de phase du système (5). En déduire l'existence des solutions périodiques de (5).
d) Que peut-on dire sur la stabilité de la solution stationnaire S_1?