Confluentes Mathematici, Vol. 2, No. 3 (2010) 313–332

DOI: 10.1142/S1793744210000211

SUR LES ORIGINES DU COCYCLE DE VIRASORO

CLAUDE ROGER

Université de Lyon, CNRS, Université Lyon 1
Ecole Centrale de Lyon, INSA de Lyon
Institut Camille Jordan UMR5208
43 boulevard du 11 novembre 1918
F-69622 Villeurbanne Cedex, France

Received 16 July 2010
Revised 31 August 2010

This paper gives a short sketch of the origins of Virasoro cocycle, both in algebra and quantum field theory.

Cet article retrace un bref historique des origines du cocycle de Virasoro, en algèbre et en théorie quantique des champs.[a]

Keywords: Lie algebras of vector fields; conformal field theory; extensions of Lie groups and Lie algebra.

AMS Subject Classification: 22, 79, 81

Cet article a pour but de retracer l'histoire du cocycle de Virasoro et de certains analogues qui lui sont indissociablement liés; nous n'avons pas cherché ici à faire réellement oeuvre d'historien, ce qui serait prématuré, nous avons simplement tenté de décrire la généalogie de cet objet physico-mathématique, de retrouver ses racines tant mathématiques que physiques, sans toutefois faire le bilan de tous les endroits où ce cocycle apparaît; nous aurons ainsi à parcourir des domaines aussi variés que fascinants, à première vue très éloignés les uns des autres, de l'algèbre homologique à la théorie des champs, et nous y verrons certaines constructions algébriques ou géométriques revenir périodiquement dans des domaines a priori différents. Je remercie ici tous les collègues dont les informations m'ont été très utiles, Patrick Aurenche, François Delduc et Jean-Louis Loday.

Mais rappelons tout d'abord de quoi il s'agit: du cercle, de ses difféomorphismes, et de ses champs de vecteurs tangents. Tout champ tangent au cercle s'identifie à une fonction sur le cercle grâce au choix d'un paramétrage, et le crochet de Lie des

[a]Cet article est une version longue de l'appendice historique de [25], auquel le lecteur pourra se référer pour plus de détails sur les notions introduites dans la suite.

champs de vecteurs peut alors s'écrire:

$$\left[f(t)\frac{d}{dt}, g(t)\frac{d}{dt}\right] = (f(t)g'(t) - g(t)f'(t))\frac{d}{dt}.$$

Cette algèbre de Lie est notée $\mathrm{Vect}(S^1)$. L'utilisation de la base de Fourier $e_n = ie^{int}\frac{d}{dt}$, dans laquelle le crochet s'écrit:

$$[e_n, e_m] = (n - m)e_{n+m},$$

permet d'en donner une description algébrique qui se généralise naturellement à coefficients dans un corps quelconque de caractéristique zéro. Cette algèbre de Lie prend le nom d'*algèbre de Virasoro* quand elle se voit rajouter un mystérieux terme central:

$$\left[f(t)\frac{d}{dt}, g(t)\frac{d}{dt}\right] = (f(t)g'(t) - g(t)f'(t))\frac{d}{dt} + c\int_{S^1} f(t)g'''(t)dt \tag{1}$$

soit, en termes des générateurs, la formule devenue célèbre:

$$[e_n, e_m] = (m - n)e_{n+m} + \frac{n^3}{12}\delta_{0,n+m}c. \tag{2}$$

A chaque algèbre de Lie son groupe? Malheureusement, ce n'est plus toujours vrai en dimension infinie, mais ici se produit un petit miracle, du moins si nous restons en coefficients réels: le groupe $\mathrm{Diff}(S^1)$ des difféomorphismes du cercle peut être vu comme un groupe de Lie de dimension infinie dont l'algèbre de Lie s'identifie à $\mathrm{Vect}(S^1)$; de plus lui aussi peut être agrémenté d'un terme central! En voici la formule:

On peut tout d'abord associer à tout $f \in \mathrm{Diff}(S^1)$ une fonction sur S^1 notée μ_f définie par $f^*(\omega) = \mu_f\omega$. Le cocycle central, dit de Bott–Thurston, se définit ensuite par la formule

$$BT(f, g) = \int_{S^1} \log\mu_{f\circ g} d\log\mu_g. \tag{3}$$

On peut distinguer sommairement deux racines principales de ce curieux objet mathématique: l'une est strictement algébrique avec les *multiplicateurs de Schur* [48] qui marquèrent les débuts de l'algèbre homologique, l'autre physique avec les célèbres *termes de Schwinger*, première apparition d'un phénomène d' “anomalie” en théorie quantique des champs. Le point commun entre ces deux origines est l'ubiquité d'un autre cocycle, universel celui-là, qui se présente sous la forme $c(A, B) = \mathrm{Tr}(A\delta B)$ (pour les détails, cf. infra) comme celui qui gouverne l'extension centrale des matrices de Jacobi [29] ou encore les groupes linéaires restreints [45]. Nous le rencontrerons tout au long de cet article; il est à la source, non seulement du cocycle de Virasoro, mais de bien d'autres analogues comme ceux des groupes de jauge ou ceux des algèbres de Kac–Moody; rappelons pourquoi ces dernières sont indissociablement liés à l'algèbre de Virasoro. Les algèbres de Kac–Moody sont précisément obtenues par extensions à partir des algèbres de lacets, et celles ci sont des algèbres de Lie de fonctions sur S^1 à valeurs dans des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie. L'action du groupe $\mathrm{Diff}(S^1)$ par reparamétrisation est alors naturelle… Pour plus de détails, nous renvoyons à [25].

L'aspect purement algébrique est celui de la théorie des extensions centrales des groupes et algèbres de Lie, dont on peut trouver par exemple les détails dans le traité de Hilton et Stammbach [26]; les deux types d'extensions se traitent de façon tout à fait parallèles, les technicités cohomologiques étant variables suivant les cas. Il est temps de procéder maintenant à quelques rappels. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie, une *extension de* $\mathfrak{g}$ *par* $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie $\hat{\mathfrak{g}}$ telle qu'il existe une suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \hat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0 \tag{4}$$

Une extension de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{h}$ est *centrale* si $i(\mathfrak{h})$ est contenu dans le centre de $\hat{\mathfrak{g}}$. Les extensions centrales de groupes, discrets ou de Lie, se définissent de façon analogue. Mais précisons maintenant une des raisons de leur importance, à savoir les représentations projectives:

Une *représentation projective du groupe* G est une application $\rho : G \to GL(n, \mathbb{K})$ telle qu'il existe

$$G \times G \xrightarrow{c} \mathbb{K}^*$$

telle que l'on ait pour tous les x, y dans G,

$$\rho(x)\rho(y) = c(x, y)\rho(xy).$$

En d'autres termes on a un homomorphisme à valeurs dans le groupe projectif et non le groupe linéaire; une représentation projective peut se linéariser en une représentation linéaire d'une extension centrale ad-hoc.

Au niveau des groupes discrets, rappelons le résultat fondamental suivant: si G est un groupe parfait, c'est-à-dire si $H_1(G) = G/[G, G] = 0$, alors il existe une *extension centrale universelle.*

$$1 \to H_2(G) \to \hat{G} \to G \to 1 \tag{5}$$

Cette notion d'universalité est à comprendre dans le sens catégorique usuel d'objet initial dans la catégorie des extensions centrales, chacune étant quotient de l'extension universelle. Plus généralement toutes les extensions centrales $(1) \to C \to E \to G \to (1)$ sont classifiées par une classe de cohomologie $c \in H^2(G, C) = Hom(H_2(G), C)$. On peut établir en outre une bijection entre les classes d'équivalence d'extensions centrales de G et les sous groupes du groupe abélien $H_2(G)$ en faisant correspondre à chaque extension le sous-groupe $C \subset H_2(G)$. Ce théorème est dû sous cette forme très générale à Michel Kervaire [32], mais une première version en est apparue dès 1904 pour le cas où le groupe G est fini, le groupe $H_2(G)$ correspondant alors aux *multiplicateurs de Schur*; des groupes finis à $\mathrm{Diff}(S^1)$ le chemin a été long et panoramique, mais le cadre algébrique est resté presque identique.

Une étape intermédiaire essentielle fut accomplie par Heinz Hopf avec son article de 1942 [27] contenant la célèbre présentation du H_2 par générateurs et relations: $H_2(G) = (R \cap [F, F])/[R, F]$. Ici R représente le noyau d'une surjection $F \to G$ où F est un groupe libre (voir [26]). Dans ce même travail, on trouve une remarque qui devait s'avérer aussi profonde que fructueuse pour l'avenir: l'analogie entre les extensions centrales de groupes et les revêtements des espaces topologiques, $H_2(G)$ correspondant alors au groupe fondamental $\pi_1(X)$. ... Curieusement, la théorie des extensions centrales pour les algèbres de Lie dut attendre 1982 (Loday et Kassel [31]) pour être publiée explicitement, même si elle était considérée comme résultat “folklorique”. Le problème de l'extension centrale universelle pour une algèbre de Lie se traite comme pour les groupes: si $H_1(\mathfrak{g}) = 0$, alors $\mathfrak{g}$ admet une extension centrale universelle

$$0 \to H_2(\mathfrak{g}) \to \hat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0 \tag{6}$$

La cohomologie des algèbres de Lie fut définie par Chevalley et Eilenberg [12] puis développée par J. L. Koszul [33] dans sa thèse d'Etat vers 1950; on peut toutefois identifier sa naissance, sous une forme cryptée, dans une note d'Elie Cartan en 1928 [8], dans lequel il considère le sous complexe des formes différentielles invariantes sur un groupe de Lie compact. Bien plus tard, cette note devait inspirer D. Sullivan dans ses travaux sur l'homotopie rationnelle, mais ceci est une autre histoire...

Ce ne fut que vers les années 60 que la cohomologie des algèbres de Lie connut son plein développement avec ses applications en théorie des représentations, topologie différentielle, et déjà physique théorique comme nous allons le voir bientôt; le magistral traité de H. Cartan et S. Eilenberg [9] y a certainement joué un rôle de catalyseur. On se limitera ici à rappeler le rôle des cohomologies continues pour les représentations des groupes ainsi que celui des cohomologies de certaines algèbres de Lie pour l'étude des classifiants et classes caractéristiques.

C'est également vers cette époque que commencèrent les travaux de Gelfand et Fuks sur la cohomologie des algèbres de Lie de champs formels et des champs de vecteurs. C'était une période brillante des mathématiques moscovites, que certains aiment encore à désigner sous le nom d' “école russe” (mais pourquoi ignorer ceux de Pétersbourg sous la houlette des Faddeev père et fils?); le fameux séminaire Gelfand vit s'élaborer parmi beaucoup d'autres choses la méthode des orbites en théorie des représentations, les cohomologies dites de Gelfand–Fuks, la supergéométrie et maintes applications algébriques, géométriques, et physiques; cette ouverture des mathématiques supposées pures vers la physique (et réciproquement) commençait à apporter un démenti au divorce déploré par Dyson dans sa conférence à l'AMS en 1972; surtout, le contraste avec la situation française de la même époque était spectaculaire!

Avant d'aller plus loin, précisons les raisons de s'intéresser à ces algèbres de Lie des champs de vecteurs sur les variétés: ce sont les algèbres de Lie correspondant aux pseudogroupes de Lie (et non groupes, qui n'existent pas vraiment dans ce contexte) de difféomorphismes des ouverts des $\mathbb{R}^n$ ou des variétés, leur classification aboutit à celle des différents types de "structures" sur les variétés, la connaissance de leurs invariants (dont la cohomologie) est donc essentielle. Le calcul de $H^*(\mathrm{Vect}(S^1))$ contenant la première apparition du 2-cocycle central fut publié en 1968 [23], le cas des variétés de dimension supérieure fut élucidé peu après, et l'algèbre de Lie $\mathrm{Vect}(S^1)$ (que les mathématiciens n'appelaient pas encore de Virasoro) apparut dès lors comme très particulière, car elle était *la seule à admettre une extension centrale non triviale*, ses grandes soeurs de dimension $n > 1$ vérifiant $H^2 = 0$.

Un autre résultat va mettre en relief l'importance de l'algèbre de Virasoro parmi les algèbres de Lie simples actuellement connues. Afin d' étendre à la dimension infinie la classification des algèbres simples de dimension finie, on peut s'intéresser aux algèbres $\mathbb{Z}$-graduées, soit $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ telles que le crochet vérifie $[\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_m] \subset \mathfrak{g}_{n+m}$, chacun des sous-espaces $\mathfrak{g}_n$ étant de dimension finie $p(n)$; on suppose que $\mathfrak{g}$ est simple et que $p(n)$ est à croissance au plus polynômiale. Parmi ces algèbres de Lie, on connait bien:

(1) *Les algèbres de Lie semi-simples de dimension finie*, pour leur graduation donnée par un système de racines. On a alors $\mathfrak{g}_n = \{0\}$ sauf pour un nombre fini de valeurs de n.
(2) *Les algèbres de lacets* construites sur les algèbres semi-simples de dimension finie et leurs extensions centrales dites *algèbres affines ou algèbres de Kac–Moody*, déjà mentionnées dans l'introduction comme indissociables de l'algèbre de Virasoro.
(3) *Les algèbres de Lie dites de Cartan*: ce sont les algèbres de champs de vecteurs formels $\mathrm{Vect}(n)$ et leurs sous-algèbres associées aux algèbres de Lie de champs de vecteurs simples, primitives et transitives; parmi elles on trouve les algèbres de Lie des champs de vecteurs formels, et leurs sous-algèbres des champs symplectiques, unimodulaires, et de contact. Ce sont les analogues formels des algèbres de champs de vecteurs tangents aux variétés.
(4) *L'algèbre de Virasoro* (dans sa version algébrique avec les générateurs de Fourier).

Une conjecture de V. G. Kac affirmant que ces algèbres étaient les seules à vérifier les conditions de simplicité, $\mathbb{Z}$-graduation, et de croissance au plus polynômiale de $p(n)$ a été transformée en théorème grâce à un spectaculaire résultat d'Olivier Mathieu [37].

Il faut ici préciser un point de terminologie souvent agaçant: certains auteurs, principalement physiciens, ont tendance à appeler l'algèbre de Virasoro sans terme central, surtout lorsqu'elle est donnée sous sa forme algébrique par $[e_n, e_m] = (n - m)e_{n+m}$, l' "algèbre de Witt". Si l'on se reporte aux travaux de l'éminent algébriste et arithméticien Ernst Witt et ses collaborateurs [11, 59], on s'aperçoit vite qu'ils ne concernent que les cas où la caractéristique est non nulle, et il vaut mieux réserver le terme d' "algèbre de Witt" à ce cas, qui pose d'ailleurs des problèmes cohomologiques nettement plus difficile [34].

Un sujet voisin des cohomologies dites de Gelfand–Fuks, et qui s'est bien développé au cours des années 80, a été l'étude de la cohomologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$ obtenue par produit tensoriel de la $\mathbb{K}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et de la $\mathbb{K}$-algèbre associative et commutative $\mathcal{A}$, le crochet étant défini par $[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab$. Les algèbres de courants, apparues en physique avec les théories de jauge non abéliennes (champs de Yang–Mills) [60] relèvent de cette catégorie avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ une algèbre de fonctions C^∞ sur un espace-temps, et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, représentant les symétries internes du problème, le plus souvent $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$. Si on considère maintenant le cas très particulier où $\mathcal{A} = C^\infty(S^1)$, l'algèbre $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$ n'est autre que l'algèbre de Lie des lacets sur $\mathfrak{g}$; l'extension centrale universelle de cette algèbre de Lie a été mise en évidence indépendamment par V. Kac [30] et R. Moody [40] dans leur imposante classification des algèbres de Lie filtrées. Ces extensions centrales devaient connaître une brillante destinée, sous le nom d'algèbres de Kac–Moody; remarquons cependant que dans son célèbre livre, Victor Kac indique au Chap 7... "*the formula for the cocycle has been known to physicists for such a long time that it is difficult to trace the original source...*". Rappelons donc cette illustre formule:

Pour f et g dans $\mathfrak{g} \otimes C^\infty(S^1) = C^\infty(S^1, \mathfrak{g})$, on a

$$c(f, g) = \int_{S^1} \kappa(f dg) \tag{7}$$

où $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ désigne la forme de Killing.

Si l'on préfère une formulation complexe, on a pour f et g dans $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, $c(f, g) = \mathrm{Res}_{z=0} \kappa(f dg)$.

Sous ses deux formes, ce cocycle est obtenu à partir des deux mêmes ingrédients: d'une part une forme bilinéaire invariante, ici la forme de Killing accompagnée de l'intégrale, ou du résidu ce qui revient au même, d'autre part une dérivation extérieure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$, ici l'application $f \mapsto f'$. En toute rigueur, la preuve de l'universalité de cette extension repose sur le calcul de la cohomologie des algèbres de lacets (voir par exemple Pressley et Segal [45] ou Lepowsky [35]).

Dans certains cas cette construction peut se généraliser: si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie munie d'une forme invariante $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$, on peut associer à une dérivation $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, un 2-cocycle $c_\delta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ sous certaines conditions d'antisymétrie; pour ce qui est de la cohomologie de $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$, le pas décisif fut franchi par S. Bloch dans un article mémorable [4]. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, on a $H_2(\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}) = \Omega^1\mathcal{A}/d\mathcal{A}$ où $\Omega^1\mathcal{A}$ désigne l'espace des différentielles de Kähler sur $\mathcal{A}$ et $d\mathcal{A}$ le sous-espace des différentielles exactes. Ce résultat s'obtient par la construction explicite d'une extension centrale

$$0 \to \Omega^1\mathcal{A}/d\mathcal{A} \to \hat{\mathfrak{g}}_{\mathcal{A}} \to \mathfrak{g}_{\mathcal{A}} \to 0 \tag{8}$$

dont Spencer Bloch a montré l'universalité, au moins pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ avec n suffisamment grand. Remarquons que si $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$ est l'algèbre des courants sur une variété V, alors $\Omega^1\mathcal{A}/d\mathcal{A} = \Omega^1(V)/d\Omega^0(V)$ (le calcul du H_2 a été réalisé dans ce cas par B. Feigin [17], indépendamment du résultat de S. Bloch). En particulier si $V = S^1$, $\Omega^1\mathcal{A}/d\mathcal{A}$ est alors isomorphe à $\mathbb{R}$ via l'intégrale et on retrouve l'algèbre de Kac–Moody associée à $\mathfrak{g}$. D'ailleurs, dans l'introduction de [4], S. Bloch indique dans son remerciement à Deligne que ... "*In communicating to me his construction, Deligne remarked* (*cryptically, as his wont*) *that he had found it while thinking about Kac–Moody Lie algebras...*". Une étape importante de cette généralisation du cocycle de Kac–Moody a été la construction générale des traces et des résidus pour les différentielles sur des courbes quelconques, due à J. Tate [56]. Ce dernier résultat peut être considéré comme une version préliminaire des résidus de dimension supérieure, dus à Grothendieck et Hartshorne.

La forme explicite du cocycle de l'extension précédente est la suivante

$$c(X \otimes a, Y \otimes b) = \kappa(X, Y)[adb] \tag{9}$$

où $[adb]$ désigne la classe de la différentielle adb modulo les différentielles exactes. Si on a une application $I : \Omega^1\mathcal{A}/d\mathcal{A} \to \mathbb{K}$, comme par exemple l'intégration sur un cycle pour $\mathcal{A} = C^\infty(V)$, on en déduit une extension centrale à noyau scalaire par la formule $c_I(X \otimes a, Y \otimes b) = \kappa(X, Y)I(adb)$.

Ce résultat inspira les travaux de Loday et Quillen qui purent calculer l'homologie de $\mathfrak{g}_\mathcal{A}$ quand $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\infty) = \lim_\to \mathfrak{gl}(n)$. Cette homologie est munie naturellement d'une structure d'algèbre de Hopf, dont ils ont déterminé l'espace des éléments primitifs; on obtient

$$\mathrm{Prim}(H_*(\mathfrak{g}_\mathcal{A}, \mathbb{K})) = HC_*(\mathcal{A})$$

avec un décalage d'indices (Thm. de Loday et Quillen [36]). La notation HC_* désigne ici l'homologie cyclique, et ce résultat généralise bien celui de Bloch car $HC_1(\mathcal{A}) = \Omega^1\mathcal{A}/d\mathcal{A}$ si $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative lisse; Feigin et Tsygan avaient construit cette homologie cyclique indépendamment de A Connes, sous le nom de "K-théorie additive" [18], mais en quoi est-elle bien une version linéaire ou additive de la K-théorie? Au terme $H_2(\mathfrak{g}_\mathcal{A}) = HC_1(\mathcal{A})$ correspond $H_2(E(\mathcal{A})) = K_2(\mathcal{A})$ avec l'extension centrale de groupes

$$1 \to \mathrm{K}_2(\mathcal{A}) \to \mathrm{St}(\mathcal{A}) \to E(\mathcal{A}) \to 1 \tag{10}$$

où $E(\mathcal{A})$ désigne le sous-groupe du groupe linéaire infini engendré par les matrices élémentaires, $\mathrm{St}(\mathcal{A})$ son extension centrale universelle ou groupe de Steinberg, et $K_2(\mathcal{A})$ le deuxième groupe de K-théorie de $\mathcal{A}$ (voir Milnor [39]).

Nous voici, du moins en apparence, éloignés du cocycle de Virasoro. Revenons à une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie d'une forme invariante $\kappa : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{K}$, et soit $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ une dérivation extérieure. Il est facile de vérifier que si l'application $(X, Y) \mapsto \kappa(X, \delta Y)$ est antisymétrique, alors elle définit un 2-cocycle que l'on notera c_δ. En particulier si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie obtenue par antisymétrisation d'une algèbre associative, l'existence d'une trace permet d'obtenir une forme bilinéaire invariante suivant la formule: $\kappa(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY)$. C'est le cas des algèbres de Kac–Moody en considérant chaque algèbre de Lie semi-simple de dimension finie comme sous-algèbre d'un $\mathfrak{gl}(n)$; pour les algèbres de courants $\mathfrak{g}_\mathcal{A}$, on peut obtenir une trace en utilisant un "résidu" ou une "intégrale" : $\Omega^1\mathcal{A} \to \mathbb{K}$; enfin, rappelons l'existence de la *trace d'Adler* sur l'algèbre associative $\psi\mathcal{D}(S^1)$ des symboles d'opérateurs pseudo-différentiels sur S^1,

$$\mathrm{Tr}\left(\sum_{i=-\infty}^{n} a_i(x)\xi^i\right) = \int_{S^1} a_{-1}(x)dx,$$

qui permet de construire deux extensions centrales indépendantes avec les dérivations extérieures $\mathrm{ad}\,\mathrm{Log}\xi$ et $\mathrm{ad}\,x$ qui donnent les cocycles $c_1(D_1, D_2) = \mathrm{Tr}(D_1[\mathrm{Log}\xi, D_2])$ et $c_2(D_1, D_2) = \mathrm{Tr}(D_1[x, D_2])$ (résultat de O. Kravchenko et B. Khesin). Rappelons que le plongement naturel $\mathrm{Vect}(S^1) \to \psi\mathcal{D}(S^1)$ permet d'induire de c_1 le cocycle de Virasoro.

En fait, tous ces multiples cocycles à valeurs scalaires, dont ceux de Virasoro et Kac–Moody, peuvent s'obtenir par plongement de l'algèbre de Lie concernée dans *l'algèbre des matrices de Jacobi* et restriction de son cocycle universel. Rappelons brièvement la formule de ce dernier: les matrices de Jacobi sont des matrices doublement infinies a_{ij} pour $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ qui vérifient $a_{ij} = 0$ si $|i-j|$ est assez grand; il est facile de vérifier que ces matrices forment une algèbre associative et donc une algèbre de Lie par antisymétrisation. Si l'on note alors J la matrice définie par $a_{ij} = \delta_{ij}\mathrm{sgn}(i)$ pour $j \neq 0$ et $a_{00} = 1$, le cocycle va s'écrire

$$c(A,B) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A[J,B]) \tag{11}$$

Une telle formule est a priori dépourvue de sens car la trace n'est pas définie pour une matrice de Jacobi, mais ici un calcul direct montre que $A[J,B]$ est en fait une matrice finie (tout le monde aura compris qu'il s'agit d'une matrice dont tous les éléments sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux). On obtient une formule explicite en décomposant chaque matrice de Jacobi en blocs $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$; on obtient $c(A,B) = \mathrm{Tr}(A_{21}B_{12} - A_{12}B_{21})$, et la vérification de la propriété de cocycle devient un exercice élémentaire.

Nous avons ainsi construit une extension centrale non triviale

$$0 \to \mathbb{K} \to \hat{\mathfrak{gl}}_J(\mathcal{A}) \to \mathfrak{gl}_J(\mathcal{A}) \to 0 \tag{12}$$

Mais nous n'avons pas précisé quel doit être l'anneau de base $\mathcal{A}$; il suffit que $\mathcal{A}$ soit une algèbre commutative sur le corps $\mathbb{K}$ avec une intégrale ou un résidu permettant de définir une trace à valeurs scalaires $\mathrm{Tr} : \mathfrak{gl}_{\mathrm{fini}}(\mathcal{A}) \to \mathbb{K}$.

Une extension analogue peut se construire dans une version analytique, avec des espaces de Hilbert, ce qui permet l'intégration de l'extension de l'algèbre au groupe linéaire. On part d'un espace de Hilbert décomposé suivant $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, et en posant $J_{|\mathcal{H}_\pm} = \pm\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\pm}$; on définit ensuite le groupe linéaire restreint $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H})$ comme le sous-groupe des applications linéaires bornées $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ telles que $[J,A]$ soit de Hilbert-Schmidt; on remarque alors que pour A et B dans $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H})$, $A[J,B]$ est traçable; autrement dit $\mathrm{Tr}(A[J,B])$ est bien définie. On en déduit les extensions au niveau du groupe et de l'algèbre de Lie

$$1 \to \mathbb{C}^* \to \hat{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}) \to 1 \tag{13}$$

$$0 \to \mathbb{C} \to \hat{\mathfrak{gl}}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{gl}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}) \to 0 \tag{14}$$

L'extension (13) est en quelque sorte la complétion de (11). Le cocycle de Bott–Thurston et celui de Virasoro pour $\mathrm{Diff}(S^1)$ peuvent être obtenus via un plongement de $\mathrm{Diff}(S^1)$ dans $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H})$, respectivement de $\mathrm{Vect}(S^1)$ dans $\mathfrak{gl}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H})$, déduit de l'action de $\mathrm{Diff}(S^1)$ sur $\mathcal{H} = L^2(S^1, \mathbb{C})$ par changement de variables. Ce cocycle a une parfaite analogie formelle avec celui de (4), il est de la forme $c(A, B) = \mathrm{Tr}(A\delta B)$ où δ est une dérivation; cependant cette analogie n'est que formelle, car la trace n'est pas définie globalement sur $\mathfrak{gl}_J$ ou $\mathfrak{gl}_{\mathrm{res}}$ et l'application $A \mapsto [J, A]$ n'est pas une dérivation extérieure. Ce cocycle a été généralisé par Alain Connes qui en a fait l'une des pierres angulaires de sa géométrie non commutative [13, 14] dans le cadre des modules de Fredholm, qui sont des espaces de Hilbert gradués $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$. Une formule $\mathrm{Tr}_S(A) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma F[F, A])$ permet de définir une trace, où γ est un opérateur de graduation sur $\mathcal{H}$. Le cocycle précédent peut alors s'écrire sous la forme $c(A, B) = \mathrm{Tr}_S(A[F, B])$; il apparaît comme un exemple de classe de cohomologie cyclique [36], et en quelque sorte le prototype de celles-ci: dans [13], p. 196, la formule d'un cocycle cyclique associé à un module de Fredholm s'écrit $c(A_0, A_1, \ldots, A_n) = \mathrm{Tr}_S(A_0[F, A_1] \cdots [F, A_n])$. L'opérateur $A \mapsto dA = [F, A]$ porte le nom de différentielle quantique; l'analogie avec le cocycle (4) est ainsi rendue plus précise.

Le surnom de "cocycle japonais", "donné parfois à ce cocycle par l'école russe" (celle de St-Petersbourg, cf. plus haut), provient de l'intervention décisive de ce cocycle dans les travaux de l'école dite de Kyoto; les mathématiciens de cette ville, travaillant au RIMS autour du Pr Mikio Sato célèbre pour ses formules, sont bien connus, M. Jimbo et ses collaborateurs notamment, pour leurs résultats sur les systèmes intégrables en dimension infinie, et notamment les hiérarchies KdV et KP. La représentation d'une algèbre de Lie de dimension infinie judicieusement choisie permet d'engendrer des familles de solutions de ces équations à solitons, et le cocycle y joue un rôle de 'deus ex machina' [15, 29]. Cependant on ne peut attribuer à cette "école de Kyoto" la priorité dans la découverte de ce cocycle; sa première description dans un cadre mathématique précis se trouve dans le célèbre traité de Pressley et Segal [45]. Tel ou tel mathématicien pourra en revendiquer la paternité, mais sa véritable origine se trouve en physique dans les travaux de F. Berezin ([3], 1965) sur la seconde quantification (voir [47] pour un survol des multiples contributions de F. Berezin à la physique mathématique). Y. Neretin [42] affirme toutefois que la première formule explicite pour ce cocycle est due à K. O. Friedrichs [20], dans son étude du "groupe canonique" dont il va être question maintenant...

Ceci nous fournit une transition naturelle vers les origines physiques du cocycle de Virasoro. Le passage de la physique classique à la physique quantique se fait d'abord de la mécanique classique à la mécanique quantique, c'est à dire dans le cas d'un nombre fini de degrés de liberté; l'espace des états quantiques se présente alors sous la forme d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, celui des fonctions d'onde. La théorie quantique des champs concerne un nombre infini de degrés de liberté, et on sait qu'il n'en existe pas encore de théorie mathématique naturelle et pleinement satisfaisante (pour un exposé lisible et pragmatique, voir [60]). Une première et rudimentaire version en est la théorie du champ libre, que l'on peut voir comme la représentation quantique d'une assemblée de particules, ou "seconde quantification". Rappelons maintenant le principe de cette seconde quantification: on associe à l' espace de Hilbert des états $\mathcal{H}$, un *espace de Fock* $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ (fermionique ou bosonique suivant le comportement statistique des particules) et on essaie de prolonger à $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ l'action d'un groupe de symétries de $\mathcal{H}$.

Précisons tout d'abord ce qu'est l'espace de Fock, dans le cas bosonique: soit $\mathcal{H}$ un espace hermitien de dimension n, munissons-le de la mesure gaussienne $d\mu(z) = \pi^{-n}\exp(-\|z\|^2)\,dz$; l'espace de Fock bosonique $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ est alors l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$ de carré sommable pour cette mesure. C'est un espace de Hilbert et toute base de $\mathcal{H}$ permet de définir une base de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$: les fonctions coordonnées $z_1, \ldots, z_n$ associées à une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathcal{H}$ définissent des fonctions pour tous les multi-indices $I \in \mathbb{N}^n$ par la formule

$$e_I(z) = z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_n^{i_n} \quad \text{si } I = (i_1, i_2, \ldots, i_n).$$

Les $e_I(z)$ constituent une base orthonormée de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ comme on le vérifie facilement par un calcul d'intégrales gaussiennes; il est alors clair que l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ se plonge dans $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ comme sous-espace partout dense.

On peut ensuite étendre cette construction de l'espace de Fock $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ à tout espace de Hilbert complexe séparable, par un procédé de passage à la limite, ou alors associer à une base hilbertienne $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$, une base e_I de la limite inductive des $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ (où $\mathcal{H}$ est de dimension finie comme ci-dessus), et définir $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ comme l'espace de Hilbert (non séparable) des $\sum_{I\in\mathbb{N}^\infty} a_I e_I$ avec $\sum |a_I|^2 < +\infty$. Une autre option, peut-être plus intuitive consiste à procéder algébriquement, en posant $\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} \mathcal{S}^k(\mathcal{H})$ où $\mathcal{S}^k(\mathcal{H})$ désigne l'espace des k-tenseurs symétriques sur $\mathcal{H}$, puis à compléter cet espace avec les précautions d'usage.

Si maintenant on essaie de prolonger l'action d'un groupe de symétries quantiques de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, on peut trouver une solution à condition de se limiter au groupe linéaire restreint (symplectique ou orthogonal suivant le cas) et la représentation sur $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ est projective et non plus linéaire; et c'est ainsi que le cocycle (6) est apparu naturellement, comme terme central d'une extension de ce "*groupe canonique*", comme on dit parfois dans la littérature physique. Voici précisément venu le moment de parler des "*anomalies*", qui ne sont autres que les classes de cohomologie qui apparaîssent dans certains calculs de la théorie quantique des champs...

Une anomalie pourra se présenter comme un défaut à être un homomorphisme, ou un défaut à être une action de groupe, ou encore une courbure... Les dites anomalies se représentent par des classes de cohomologie appropriées, mais l'élaboration du cadre nécessaire pour ces cohomologies (cohomologie de groupes, d'algèbres de Lie, ou théories topologiques...) est souvent fort délicate, et a parfois suscité des problèmes mathématiques originaux et difficiles... Ces anomalies pourront être "globales", c'est-à-dire représenter des invariants topologiques, du type classes caractéristiques ou invariants de Chern–Simons, comme l'action de

Wess–Zumino–Witten, ou alors "locales", purement algébriques, et se ramenant à des classes de cohomologie de certains groupes ou algèbres de Lie de dimension infinie. Du point de vue lagrangien, la distinction local-global apparaît suivant que les termes supplémentaires modifient ou non la dynamique. Ces défauts apparaîssent lors du passage classique $\to$ quantique et sont intrinsèquement liés à la quantification. Une situation typique est la suivante: au niveau classique on a un homomorphisme ϕ d'algèbres de Poisson, donc:

$$\{\phi(f), \phi(g)\} = \phi(\{f, g\})$$

et sa quantification $\hat{\phi}$ présente un défaut à être un homomorphisme suivant la formule:

$$[\hat{\phi}(f), \hat{\phi}(g)] = \hat{\phi}([f, g]) + \mathrm{Id}\, c(f, g),$$

faisant ainsi apparaître un cocycle c à valeurs scalaires.

Retracer l'histoire des anomalies pourrait faire l'objet d'une monographie entière; nous en indiquerons seulement les principales étapes, en développant les points en relation directe avec le cocycle de Virasoro. Ce fut dès les années 50 que Julian Schwinger mit en évidence un phénomène d'anomalies, dans le cadre de l'électrodynamique quantique, pour l'étude de la désintégration du π^0 (méson-pi ou pion) en photons; le calcul des propagateurs suivant le diagramme de Feynman ci-dessous fait apparaître une anomalie, c'est à dire une obstruction à étendre les symétries classiques au cas quantique. Le calcul est détaillé dans le traité de théorie quantique des champs de Peskin et Schroeder, on y trouve le résultat final dans la formule 19.45 [44, p. 661]; cette formule peut s'écrire en langage géométrique sous la forme:

$$\mathrm{Div}(J) = \frac{e^2}{16\pi^2}(\langle \Lambda, \Omega \wedge \Omega \rangle),$$

où Λ est le tenseur de volume contravariant, Ω désigne l'intensité du champ électromagnétique, et bien entendu, J est le vecteur courant. Le calcul quantique met donc en défaut la conservation du courant, et c'est là que se trouve

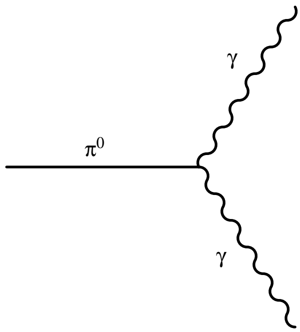


Fig. 1. Désintégration du pion neutre.

l'anomalie! On peut interpréter mathématiquement cette anomalie comme une singularité dans un calcul de distributions, soit un produit de deux distributions de Dirac, ou encore comme un défaut d'homomorphisme mettant en évidence un cocycle central, le groupe sous-jacent étant le groupe de jauge de l'électrodynamique, soit $C^\infty(X, \mathrm{U}(1))$ pour un espace-temps X [49–51]. L'étude de ces phénomènes fut ensuite poursuivie par R. Jackiw et S. Adler, créateurs du terme d'anomalies [2] en 1969, toujours pour l'électrodynamique quantique. Au même moment, on assistait à un développement spectaculaire des théories de jauge non abéliennes (Yang–Mills) avec entre autres les courants faibles et la chromodynamique quantique; le phénomène d'anomalies dans le cadre non abélien fut mis en évidence par S. Adler et D. Bardeen; c'est aussi vers cette époque qu'au cours de l'un des multiples colloques consacrés à la théorie des groupes en physique, André Lichnérowicz pouvait prophétiser que la physique théorique allait devenir de plus en plus cohomologique....

La théorie générale des anomalies, et sa compréhension dans le cadre algébrique et géométrique adéquat, fut élaborée presque simultanément et indépendamment par L. D. Faddeev, R. Stora et B. Zumino (ordre alphabétique). Du point de vue mathématique, il s'agit de classes de cohomologie du groupe de jauge $C^\infty(V, G) = \mathcal{G}$ ou de l'algèbre des courants $C^\infty(V; \mathfrak{g}) = \underline{\mathcal{G}}$, où G est un groupe compact non abélien. Les articles [16, 54] constituent une approche intéressante et accessible pour un mathématicien; par exemple on voit dans [16] apparaître le cocycle comme une obstruction dans l'écriture de la quantification canonique d'une théorie de jauge. Même si ces cocycles ne sont pas directement liés à celui de Virasoro sauf par l'intermédiaire de leur "container" commun longuement décrit plus haut, leur contexte et leur détermination sont tout à fait analogues, et nous allons donc en donner certains détails.

Les formules de [16] peuvent paraître un peu mystérieuses au premier abord, mais c'est un exercice instructif que de les transcrire sous une forme algébrico-géométrique plus globale. Prenons par exemple la formule (22)

$$[G^a(x), G^b(y)] = if^{abc}G^c(x)\delta^{(3)}(x-y) + \frac{1}{12i\pi^2}d^{abc}\varepsilon_{ijk}\partial_i A_j^c(x)\partial_k(\delta^{(3)}(x-y))$$

où f^{abc} désigne les constantes de structure de l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$, d^{abc} désigne les coefficients du générateur de $H^3(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$, $\underline{A} = A_j^c(x)e_c dx_j$ désigne le champ de jauge, soit en langage mathématique la forme de connexion. L'espace-temps est ici de dimension 3 et ε_{ijk} désigne sa forme volume. L'anomalie est alors le second terme dans le second membre. Dans une écriture globale, cette formule nous donne: pour f et g dans $\mathcal{G}$ on a

$$[f, g](x) = [f(x), g(x)] + \frac{1}{12i\pi^2}\int_V T(f dg \wedge d\underline{A})$$

où la forme $T(f dg \wedge \underline{A})$ s'interprète comme

$$T(f dg \wedge \underline{A})(x) = d^{abc} f^a(x) dg^b(x) \wedge dA^c(x).$$

En notant $\mathcal{C}$ l'espace des champs de jauge et $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions sur $\mathcal{C}$, on peut considérer cette anomalie comme un 2-cocycle à valeurs dans $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{G}} \times \underline{\mathcal{G}} &\to \mathcal{F} \\ (f,g) &\mapsto c(f,g) \end{aligned}$$

où $c(f,g)$ est défini par $c(f,g)(\underline{A}) = \int_V T(f dg \wedge \underline{A})$.

Ces résultats sont curieusement analogues et presque contemporains des calculs cohomologiques sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$ que nous avons mentionnés plus haut; ils ont été en tout cas élaborés de façon strictement indépendante et l'analogie ne semble pas avoir été remarquée à l'époque.

Un peu plus tard, Mickelsson a donné de ce cocycle une présentation plus analytique, en terme de seconde quantification, permettant de trouver l'anomalie à partir du cocycle universel du groupe linéaire restreint; pour chaque connexion $A \in \mathcal{C}$, on a un espace de Fock fermionique $\mathcal{F}_A$ associé, construit à partir des solutions de l'équation de Dirac pour A; les transformations de jauge agissent alors simultanément sur la connexion et sur l'espace de Fock et c'est ce qui fait toute la difficulté de ces théories de jauge. On en déduit une représentation $\underline{\mathcal{G}} \to \mathfrak{gl}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H})$ et l'image réciproque du cocycle (9) sur $\mathfrak{gl}_{\mathrm{res}}$ nous donne le cocycle de $\underline{\mathcal{G}}$. Ce cocycle est connu dans la littérature sous le nom de cocycle de Mickelsson-Rajeev [38] lorsque la dimension de l'espace-temps est égale à 3. C'est un habillage analytique du cocycle de Faddeev que nous avons décrit plus haut. Il peut en outre s'exprimer en terme d'opérateurs pseudo-différentiels et du résidu de Wodzicki. Un exposé très clair de tous ces résultats se trouve dans les travaux de C. Ekstrand [1].

Dans le même ordre d'idées, nous allons maintenant mentionner brièvement un travail de G. Segal intitulé "Faddeev's anomaly in Gauss's law", très intéressant mais hélas non publié; G. Segal y donne l'analyse topologique de ces anomalies en théorie de jauge. Les espaces de Fock fermioniques forment un fibré sur l'espace des connexions $\mathcal{C}$, soit $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}$ avec $\pi^{-1}(A) = \mathcal{F}_A$. Cet espace $\mathcal{F}_A$ est isomorphe naturellement à $\mathcal{F}$, c'est l'action de jauge qui est donnée via le potentiel A. Le groupe de jauge opère donc naturellement et on a une projection des espaces quotients $\mathcal{F}/\mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}/\mathcal{G}$. L'espace des états physiques est alors l'espace des sections de ce "fibré"; ce n'est pas un véritable fibré en variétés de dimension infinie à cause des singularités de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{C}$ (voir par exemple les travaux de Singer [52]). G. Segal déduit ensuite du projectifié $\mathcal{P}$ du fibré de Fock $\mathcal{F}$, un fibré $\mathcal{P}/\mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}/\mathcal{G}$ de fibre $P(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe; cet espace $P(\mathcal{H})$ est isomorphe à un projectif complexe infini $\mathbb{C}P(\infty)$, et c'est donc topologiquement un espace d'Eilenberg–Mac Lane $K(\mathbb{Z},2)$; la projection $\mathcal{P}/\mathcal{G} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}/\mathcal{G}$ est donc caractérisée par une classe de cohomologie entière $\tilde{c} \in H^3_{\mathrm{top}}(\mathcal{C}/\mathcal{G}, \mathbb{Z})$. L'auteur montre ensuite par un argument très subtil, du type théorème de Van-Est, la relation entre cette classe topologique et le cocycle de Faddeev: on a une application $H^3_{\mathrm{top}}(\mathcal{C}/\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{I} H^2(\underline{\mathcal{G}}, \mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathbb{R}))$ définie naturellement; soit une forme fermée $\omega \in \Omega^3(\mathcal{C}/\mathcal{G})$ représentant $\tilde{c}$, elle se relève suivant une forme fermée $\overline{\omega} \in \Omega^3(\mathcal{C})$. L'espace $\mathcal{C}$ étant convexe, donc acyclique, il existe $\alpha \in \Omega^2(\mathcal{C})$ telle que $d\alpha = \overline{\omega}$; la classe $I(\tilde{c})$ va alors se définir par

$$I(\tilde{c})(X,Y)(A) = \overline{\omega}_A(\theta_X(A), \theta_Y(A))$$

où $\theta_X(A)$ désigne l'action infinitésimale du courant X sur la connexion A; en d'autres termes, $\theta_X(A) = dX + [X, A]$. G. Segal montre enfin que $I(\tilde{c})$ s'identifie au cocycle de Faddeev. Nous nous sommes quelque peu attardé sur ce sujet même s'il nous éloigne en apparence du cocycle de Virasoro, car il est très instructif pour comprendre algébriquement les anomalies.

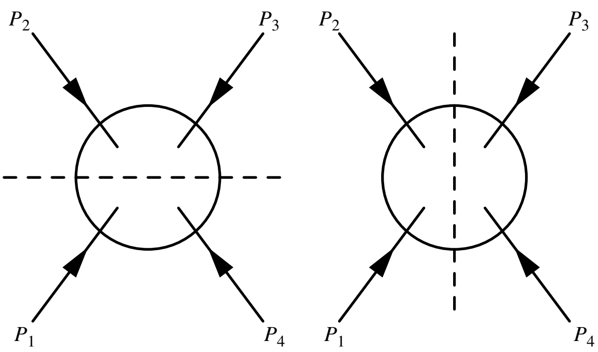
C'est maintenant qu'il faut parler des *modèles duaux*, assez oubliés de nos jours, mais qui eurent leur heure de gloire dans les années 70 et se développèrent simultanément et en interaction (si on ose dire) avec les diverses anomalies.

Indiquons brièvement l'idée de départ de cette théorie des modèles duaux, qui a été le premier lieu de l'apparition de l'algèbre de Virasoro en physique. Dans l'étude des interactions de deux particules lourdes (les *hadrons*) représentée par un diagramme du type suivant (2(a)) soit $P_1 + P_2 \to P_3 + P_4$; l'idée de base des modèles duaux consiste à considérer simultanément ce même diagramme comme celui de l'interaction $P_2 + P_3 \to P_1 + P_4$, soit (2(b)).

La loi de conservation de l'impulsion donne $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$ et on en déduit les variables d'énergie ("de Mandelstam")

$$S = (P_1 + P_2)^2 = (P_3 + P_4)^2, \quad t = (P_2 + P_3)^2 = (P_1 + P_4)^2.$$

La fonction d'amplitude $A(S,t)$ est alors une fonction analytique de S et de t; on voit apparaître des phénomènes de résonance d'où le nom de *dual resonance models* pour ces théories. Du point de vue phénoménologique, ces résonances apparaîssaient comme de nouvelles particules hadroniques, et leur nombre semblait très grand; le développement de la physique expérimentale des particules au cours des années soixante a permis la découverte d'un nombre imposant de ces



(a) 1 (b) 2

Fig. 2. Modèle duaux.

particules lourdes, que la théorie alors disponible ne permettait pas encore de classifier et d'interprèter de manière satisfaisante; pour un historique du sujet, voir le beau livre de Ne'eman et Kirsh [41]. Citons l'introduction de [19]: "*In the 1960's, one of the mysteries in strong interaction physics was the enormous proliferation of strongly interacting particles or hadrons. Hadronic resonances seemed to exist with rather high spin... the resonances were so numerous that it was not plausible that they were all fundamental...*". Un exemple typique de telles interactions est la désintégration baryon-antibaryon (par exemple neutron-antiproton) en trois mésons π [49].

L'analyse complexe a permis de mettre au point des modèles analytiques pour la théorie; ces modèles présentent une symétrie de jauge qui s'exprime en terme d'opérateurs: les célèbres opérateurs L_n sont ainsi apparus pour la première fois en physique dans l'article de Virasoro [57, 58] très souvent cité mais rarement lu. Comme il est d'usage en physique, on ne voit pas apparaître le groupe ou l'algèbre de Lie de façon intrinsèque, mais une représentation donnée en général par des opérateurs pour lesquels on doit ensuite vérifier les conditions de groupe ou d' algèbre. Ici, ces opérateurs L_n s'expriment comme somme quadratique d'oscillateurs, comme pour les représentations dans l'espace de Fock bosonique que nous avons défini plus haut. Dans [57] l'auteur conclut de façon erronée à l'existence d'une représentation linéaire et non projective, donc le cocycle de Virasoro n'a pas été découvert par Miguel Virasoro lui-même! La propriété d'algèbre de Lie sans le terme central, autrement dit $[L_n, L_m] = (m - n)L_{m+n}$, est quant à elle apparue pour la première fois dans un contexte physique dans l'article de S. Fubini et G. Veneziano [21]. La mise en évidence du terme central dans cette situation est attribuée par P. Ramond à Joe Weiss et Louis Clavelli [46], voir aussi Brower et Thorn [7]. Peu de temps après a été construite l'algèbre de Neveu–Schwarz [43] avec la dualité bosons-fermions, qui devait marquer l'essor des superalgèbres...

Ce n'est pas notre but que de retracer toute cette page glorieuse de l'histoire de la physique contemporaine, mais mentionnons cependant que les premiers *modèles*

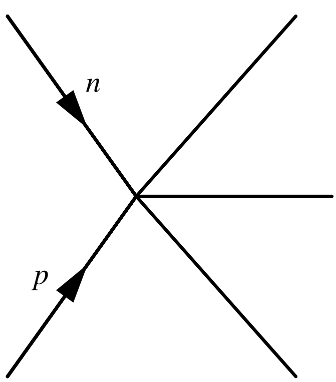


Fig. 3. Désintégration proton–neutron.

de cordes et de supercordes sont issus de ces modèles duaux: ce furent le modèle de Veneziano fondé sur les fonctions eulériennes comme fonctions d'amplitude (1968), puis la corde bosonique de Nambu (1970); la géométrie sous-jacente, avec l'action de Diff(S^1) est apparue explicitement pour la première fois dans le travail de Galli [22]; les résonances apparaîssant comme celles des vibrations de la "corde". Pour une approche élémentaire, mais aussi esthétique que pédagogique de la théorie des cordes, voir [61]. La suite de l'histoire est longue, riche en rebondissements passionnants, et n'est certainement pas achevée de nos jours; voir encore les introductions de [61] et [24].

C'est en théorie des cordes qu'est apparue *l'anomalie conforme*, dite aussi anomalie de Virasoro; précisons maintenant pourquoi la géométrie conforme intervient dans ce scénario. Tout le monde connaît la géométrie conforme et ses transformations qui préservent les angles, ainsi que le théorème de Liouville qui caractérise les transformations conformes en dimension $n \geq 3$, et les homéomorphismes biholomorphes si $n = 2$. En théorie des champs le groupe conforme intervient comme groupe de symétries; l'approche axiomatique de la théorie impose [55] l'invariance sous l'action d'un groupe de symétries de l'espace-temps, en général celui de Poincaré; si on décide de l'étendre au groupe conforme, on obtient la *théorie des champs conformes* (CFT suivant le sigle anglais). La théorie des cordes rend nécessaire une théorie quantique conforme sur l'espace-temps, d'où cette anomalie de Virasoro: la théorie des cordes bosoniques n'est invariante par une transformation conforme de la métrique que si la dimension de l'espace-temps est égale à 26. Le résultat s'obtient par un calcul explicite de la charge centrale ([24], p. 130) pour une certaine représentation de l'algèbre de Virasoro; ce résultat fut montré par Polyakov vers 1980 par des techniques d'intégrales de chemin; ce fut la première apparition du mystérieux $d = 26$, dont on peut rencontrer d'autres avatars dans différents contextes quantiques [6].

En manière de conclusion, nous allons expliquer la relation entre l'algèbre de Virasoro et *l'effet Casimir*. Ce dernier est une manifestation de l'énergie du vide; il est classique que la quantification canonique d'un oscillateur harmonique donne comme valeur du hamiltonien

$$H = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{15}$$

où ω est la fréquence et n le nombre de particules, par conséquent $H \neq 0$ même si $n = 0$. En 1948, H. B. G. Casimir déterminait la force d'attraction entre deux plaques conductrices parallèles, par un calcul audacieux mais classique dans ce genre de physique: l'énergie de la "boîte" apparaît comme la différence entre deux quantités infinies, l'énergie du vide calculée suivant la formule (12) et celle du vide perturbé par la présence des plaques (voir [10]). La confirmation expérimentale est due à Sparnaay en 1958 [53]. Ce phénomène a trouvé une autre interprétation dans le cadre de la théorie des champs conformes en dimension 2, dans le travail de Blöte, Cardy et Nightingale [5], et c'est là qu'intervient l'algèbre de Virasoro.

Dans les théories de champs conformes en dimension 2, les transformations du tenseur d'énergie impulsion s'écrivent sous la forme

$$T(z)dz^2 = T'(z')(dz')^2 + \frac{c}{12}\{z', z\}dz^2 \tag{16}$$

où $\{z', z\}$ désigne la dérivée Schwarzienne de la transformation $z' = \phi(z)$ (voir [28] Tome II, p. 103). Dans le formalisme géométrique des champs de tenseurs, et de leurs transformations, cette relation s'écrit:

$$\phi^*(Tdz^2) = \left[(T \circ \phi)(\phi')^2 + \frac{c}{12}S(\phi)\right]dz^2. \tag{17}$$

Il ne s'agit que de la complexification de la formule de l'action coadjointe de $\mathrm{Diff}(S^1)$, voir [47, Chap. 4].

Pour l'étude de l'effet Casimir, on considère une bande de largeur L dans le plan complexe de la variable u et la transformation conforme $z = \exp\left(\frac{2i\pi u}{L}\right)$ de cette bande sur le plan des z. La formule (16) donne dans ce cas:

$$T_{(\mathrm{bande})}(u)(du)^2 = -\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\left(T(z)z^2 - \frac{c}{24}\right)(dz)^2.$$

L'invariance par translation montre que les valeurs moyennes sur le plan sont nulles donc $\langle T(z)\rangle = 0$. On en déduit $\langle T_{(\mathrm{bande})}(u)\rangle = \frac{c}{24}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ ([28], p. 105). Itzykson et Drouffe interprètent ce résultat de la façon suivante: "...*ceci nous permet d'interpréter l'anomalie comme un effet Casimir, c'est-à-dire un déplacement de l'énergie libre comme conséquence de la géométrie finie...*".

La comparaison avec la formule obtenue par Casimir [10] est instructive; il serait intéressant de pouvoir faire directement le lien entre l'énergie de l'oscillateur et la valeur de la charge centrale pour une représentation appropriée de l'algèbre de Virasoro.

References

1. C. Adam, C. Ekstrand and T. Sýkora, Covariant Schwinger terms, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 105033.
2. S. L. Adler and W. A. Bardeen, Absence of higher-order corrections in the anomalous axial-vector divergence equation, *Phys. Rev.* **182** (1969) 1517–1536.
3. F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, translated from the Russian by N. Mugibayashi and A. Jeffrey, Pure and Applied Physics, Vol. 24 (Academic Press, 1966).
4. S. Bloch, The dilogarithm and extensions of Lie algebras, in *Algebraic K-theory, Evanston 1980*, *Proc. Conf., Northwestern Univ.*, Evanston, IL, 1980, Lecture Notes in Math., Vol. 854 (Springer, 1981), pp. 1–23.
5. H. W. J. Blöte, J. Cardy and M. Nightingale, Conformal invariance, the central charge, and universal finite-size amplitudes at criticality, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 742–745.
6. M. J. Bowick and S. G. Rajeev, The complex geometry of string theory and loop space, in *Proc. of the Johns Hopkins Workshop on Current Problems in Particle Theory,* 11, *Frontiers in Particle Theory* (World Scientific, 1988), pp. 101–144.

7. R. C. Brower and C. B. Thorn, Eliminating spurious states from the dual resonance model, *Nucl. Phys. B* **31** (1971) 163–182.
8. É. Cartan, Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos, *C. R. Acad. Sci. Paris T* **187** (1928) 196–198.
9. H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra* (Princeton Univ. Press, 1956).
10. H. Casimir, On the attraction between two perfectly conducting plates, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. B* **51** (1948) 793.
11. H.-J. Chang, Über Wittsche Lie-Ringe, *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.* **14** (1941) 151–184.
12. C. Chevalley and S. Eilenberg, Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948) 85–124.
13. A. Connes, *Géométrie Non Commutative* (InterEditions, 1990).
14. A. Connes, *Noncommutative Geometry* (Academic Press, 1994).
15. L. A. Dickey, *Soliton Equations and Hamiltonian Systems*, 2nd edn. Advanced Series in Mathematical Physics, Vol. 26 (World Scientific, 2003).
16. L. D. Faddeev, Operator anomaly for the Gauss law, *Phys. Lett. B* **145** (1984) 81–84.
17. B. L. Feĭgin, On the cohomology of the Lie algebra of vector fields and of the current algebra, *Selecta Math. Soviet.* **7** (1988) 49–62. Selected translations.
18. B. L. Feĭgin and B. L. Tsygan, Additive K-theory, in *K-theory, Arithmetic and Geometry* (Moscow, 1984–1986), Lecture Notes in Math., Vol. 1289 (Springer, 1987), pp. 67–209.
19. P. H. Frampton, *Dual Resonance Models and Superstrings* (World Scientific, 1986).
20. K. O. Friedrichs, *Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields* (Interscience, 1953).
21. S. Fubini and G. Veneziano, Algebraic treatment of subsidiary conditions in dual resonance models, *Ann. Phys.* **63** (1971) 12–27.
22. A. Galli, Conformal invariance in the dual symmetric theory of hadrons, *Nuovo Cimento A* **69** (1970) 275–289.
23. I. M. Gel′fand and D. B. Fuks, Cohomologies of the Lie algebra of vector fields on the circle, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **2** (1968) 92–93.
24. M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, Vol. 1, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2nd edn. (Cambridge Univ. Press, 1988), Introduction.
25. L. Guieu and C. Roger, *L'algèbre et le Groupe de Virasoro, Aspects Géométriques et Algébriques, Généralisations* (Les Publications, 2007).
26. P. J. Hilton and U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 4, 2nd edn. (Springer-Verlag, 1997).
27. H. Hopf, Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, *Comment. Math. Helv.* **14** (1942) 257–309.
28. C. Itzykson and J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Vol. 2 (Cambridge Univ. Press, 1989).
29. V. G. Kac and A. K. Raina, *Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite-Dimensional Lie Algebras*, Advanced Series in Mathematical Physics, Vol. 2 (World Scientific, 1987).
30. V. G. Kac, *Infinite-Dimensional Lie Algebras*, 3rd edn. (Cambridge Univ. Press, 1990).
31. C. Kassel and J.-L. Loday, Extensions centrales d'algèbres de Lie, *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) **32** (1983) 119–142.
32. M. A. Kervaire, Multiplicateurs de Schur et K-théorie, in *Essays on Topology and Related Topics* (*Mémoires dédiés à Georges de Rham*) (Springer, 1970), pp. 212–225.

33. J.-L. Koszul, Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, *Bull. Soc. Math. France* **78** (1950) 65–127.
34. D. Leites, Towards classification of simple finite dimensional modular Lie superalgebras, *J. Prime Res. Math.* **3** (2007) 101–110.
35. J. Lepowsky, Generalized Verma modules, loop space cohomology and MacDonald-type identities, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **12** (1979) 169–234.
36. J.-L. Loday, *Cyclic Homology*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 301 (Springer-Verlag, 1992), Appendix E by María O. Ronco.
37. O. Mathieu, Classification of simple graded Lie algebras of finite growth, *Invent. Math.* **108** (1992) 455–519.
38. J. Mickelsson, *Current Algebras and Groups*, Plenum Monographs in Nonlinear Physics (Plenum Press, 1989).
39. J. Milnor, *Introduction to Algebraic K-Theory*, Annals of Mathematics Studies, No. 72 (Princeton Univ. Press, 1971).
40. R. V. Moody, Euclidean Lie algebras, *Canad. J. Math.* **21** (1969) 1432–1454.
41. Y. Ne'eman and Y. Kirsh, *Les Chasseurs de Particules* (Editions Odile, 1999).
42. Y. A. Neretin, *Categories of Symmetries and Infinite-Dimensional Groups*, London Mathematical Society Monographs. New Series, Vol. 16 (The Clarendon Press Oxford Univ. Press, 1996), translated from the Russian by G. G. Gould.
43. A. Neveu and J. H. Schwarz, Factorizable dual model of pions, *Nucl. Phys. B* **31** (1971) 86–112.
44. M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, ed. D. Pines (Addison-Wesley, 1995).
45. A. Pressley and G. Segal, *Loop Groups* (The Clarendon Press Oxford Univ. Press, 1986).
46. P. Ramond, Comment on the Virasoro group in dual-resonance models, *Lett. Nuovo Cimento* **4** (1972) 422–424.
47. C. Roger, Hommage à Feliks A. Berezin, *Gazette des Mathématiciens* (2006) 23–30.
48. I. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare substitutionen, *J. Reine Angew. Math.* **127** (1904) 20–40.
49. J. Schwinger, *Selected Papers (1937–1976) of Julian Schwinger*, Mathematical Physics and Applied Mathematics, Vol. 4, eds. M. Flato, C. Fronsdal and K. A. Milton (D. Reidel, 1979).
50. J. Schwinger, On gauge invariance and vacuum polarization, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664–679.
51. J. Schwinger, Field theory commutators, *Phys. Rev. Lett.* **3** (1959) 296–297.
52. I. M. Singer, Families of Dirac operators with applications to physics, *Astérisque* (Numero Hors Serie) (1985) 323–340. The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984).
53. M. J. Sparnaay, Measurement of attractive forces between flat plates, *Physica* **24** (1958) 751–764.
54. R. Stora, Algebraic structure and topological origin of anomalies, in *Progress in Gauge Field Theory (Cargèse, 1983)*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., Vol. 115 (Plenum, 1984), pp. 543–562.
55. R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and all that*, Mathematical Physics Monograph Series, 2nd edn. (Benjamin/Cummings, 1978).
56. J. Tate, Residues of differentials on curves, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **1** (1968) 149–159.
57. M. A. Virasoro, Subsidiary conditions and ghosts in dual-resonance models, *Phys. Rev. D* **1** (1970) 2933–2936.

58. M. A. Virasoro, The little story of an algebra, in *String Theory and Fundamental Interactions*, Lecture Notes in Phys., Vol. 737 (Springer, 2008), pp. 137–144.
59. E. Witt, Über eine Klasse von Algebren mit lauter endlich erzeugbaren Unteralgebren, *Mitt. Math. Gesellsch. Hamburg* **10** (1976) 311.
60. A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell* (Princeton Univ. Press, 2003).
61. B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, 2nd edn. (Cambridge Univ. Press, 2009).