Analyse pour l'informatique **Feuille d'exercices N°1**
2013-2014

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n+n^{100}}{n^{101}},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-2}+\ln(n)+\sqrt{n}}{\pi\sqrt{n}+1},\ \lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n.$$

La suite $u_n=(1-\frac{1}{n})\sin(\frac{2n\pi}{3})$ a-t-elle une limite ? Calculer $\limsup_{n\to\infty}(u_n)$ et $\liminf_{n\to\infty}(u_n)$.

Exercice 2. Relations de comparaison.

1. Soit $u_n=n^4+\cos(n)+/n$. Dire si $u_n\sim v_n$ pour $v_n=n^4, v_n=2n^4, v_n=n^4+1, v_n=n^4+1/n$.
2. Calculer les limites des suites suivantes :

$$u_n=\frac{\sin(\frac{2}{n})}{\sin(\frac{1}{n})}, v_n=\frac{n^6+\cos(n)+1}{n^4+n}\tan(\frac{1}{n^2}), w_n=\frac{2}{\sin^2(\frac{1}{n})}-\frac{1}{1-\cos(\frac{1}{n})}, z_n=\frac{\exp\left(\frac{2}{\sin^2(\frac{1}{n})}\right)}{\exp\left(\frac{1}{1-\cos(\frac{1}{n})}\right)}.$$

Exercice 3. Soit $\theta\in]0,\pi[$. Pour $n\geq 0$, on pose $u_n=\cos(n\theta)$ et $v_n=\sin(n\theta)$.

1. Factoriser $u_{n+2}-u_n$ et $v_{n+2}-v_n$.
2. En utilisant ce qui précède et les opérations sur les limites, montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ ne sont pas convergentes.
3. Est-ce que ces deux suites admettent des sous-suites convergentes ? Calculer $\limsup_{n\to\infty}(u_n)$ et $\liminf_{n\to\infty}(u_n)$.

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, calculer en fonction de n le terme général u_n de la suite.

1. $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0=5, u_1=1$ et $u_{n+2}=4u_{n+1}-3u_n, n\geq 0$.
2. $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0=1, u_1=\sqrt{2}$ et $u_{n+2}=\frac{\sqrt{2}}{2}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n, n\geq 0$.
3. $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0=1, u_1=3$ et $u_{n+2}=-6u_{n+1}-9u_n, n\geq 0$.

Exercice 5. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie pour $x_0>0$ par $x_{n+1}=x_0\sqrt{x_n}$. En se ramenant à une suite arithmetico-géométrique, montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par u_0, v_0 tels que $0<u_0<v_0$ et les relations $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$.

1. Montrer que les deux suites sont adjacentes.
2. On pose $u_0=v_0\cos(\alpha), p_0=1$ et pour $n\geq 1$, $p_n=\prod_{k=1}^n\cos(\frac{\alpha}{2^k})$. Montrer que $u_n=v_n\cos(\frac{\alpha}{2^n}), v_n=v_0p_n$ et $\sin(\frac{\alpha}{2^n})p_n=\frac{1}{2}\sin(\frac{\alpha}{2^{n-1}})p_{n-1}$. En déduire la limite commune de ces suites.

Exercice 7. Soit $a>0$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie pour $x_0>0$ par $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$. Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.

Exercice 8. Soit $a>0$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie pour $x_0>0$ par $x_{n+1}=x_n+\frac{a}{x_n}$ et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n=x_{n+1}^2-x_n^2$. Montrer que $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$ et que $\lim_{n\to\infty}u_n=2a$.

Exercice 9. Soit $a>0$. Pour $n\geq 1$ on pose $H_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}, u_n=a^{H_n}$ et $v_n=H_n-\ln(n)$.

1. En étudiant par exemple les variations de $x\mapsto(x+1)\ln(x+1)-x$ et $x\mapsto(x+1)\ln(x+1)-x-x^2/2$, montrer que pour tout $x>-1$, on a $\frac{x}{1+x}\leq\ln(1+x)$ et pour $x\geq 0$, $\ln(1+x)\leq\frac{x}{2}(1+\frac{1}{1+x})$.

2. En utilisant les inégalités précédentes, montrer que v_n est décroissante et minorée. Elle admet donc une limite γ appelée constante d'Euler telle que $\gamma \simeq 0,577$.
3. Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ puis celle de la série $\sum u_n$.

Exercice 10. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie pour $x_0 > 0$ par $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$ et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = e^{x_{n+1}} - e^{x_n}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ et que $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

Exercice 11. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

(a) $u_n = \frac{n+1}{n^3+7}$, $u_n = \frac{n+1}{n+7}$, $u_n = \frac{n+1}{n^2-7}$, $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $u_n = \frac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$, $u_n = \frac{1}{n^{(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}}$.

(b) $u_n = \frac{1}{(\ln(n^2+2))}$, $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$, $u_n = \frac{n}{2^n}$, $u_n = \frac{n^{100}}{2^n}$, $u_n = \frac{1}{n!}$, $u_n = \frac{n^{100}}{n!}$, $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!^2)}{(2n-1)!}$.

(b) $u_n = \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$, $u_n = (1-\frac{1}{n})^{n^2}$, $u_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2}$.

Exercice 12. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

$$a.\ u_n = \frac{n!}{n^n} \quad b.\ u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad c.\ u_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \quad d.\ u_n = \frac{n^2}{n^3+1} \quad e.\ u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$$

$$f.\ u_n = \frac{1}{(\ln(n))^{\ln n}} \quad g.\ u_n = \frac{1}{\ln(n^2+n+1)} \quad h.\ u_n = \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n k^2} \quad i.\ u_n = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}.$$

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$ mais que la réciproque est fausse.

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et la relation $u_{n+1} = u_n\frac{1+u_n}{1+2u_n}$.

1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim -u_n^2$ et $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}) = 1$.
3. En déduire que la série $\sum u_n^2$ est convergente et que la série $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 15. Etudier la convergence de la série de terme générale u_n dans les cas suivants :

(a) $u_n = (-1)^n\frac{n^3}{n!}$, $u_n = \frac{a^n}{n!}(a \in \mathbb{C})$, $u_n = na^{n-1}(a \in \mathbb{C})$.

(b) $u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln(n+1))}$, $u_n = \sin((n+\frac{1}{n})\pi)$, $u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

(b) $u_n = n\ln(1+\frac{1}{n}) - \cos(\frac{1}{\sqrt{n}})$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

Exercice 16. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \frac{a-(-1)^n\sqrt{n}}{n-(-1)^n\sqrt{n}}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Calculer $w_n = u_n + v_n$. En déduire, selon les valeurs de a, la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 17. Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $u_n = \ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha})$. Déterminer un équivalent de $u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. En déduire, selon les valeurs de α, la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 18. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geq n_a}$ la suite définie par $u_n = \frac{a^n}{a^n+\ln(n)}$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.

Exercice 19. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$. Montrer que $u_n \sim \frac{\ln(n)}{n^2}$ en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 20. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \ln(1+\frac{(-1)^n}{n+1})$. Montrer que $u_{2n}+u_{2n+1} = 0$. Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 21. Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $u_n = \ln(1-\frac{1}{n^2})$. En utilisant une somme télescopique, montrer que $\sum u_n$ est convergente et calculer sa somme.