Exercice 1. Montrer que les suites suivantes convergent simplement sur $\mathbb{R}$, ne convergent pas uniformément sur $\mathbb{R}$, mais convergent uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

- $f_n(x) = \frac{x}{|x|+n}, n \geq 1$.
- $g_n(x) = xe^{x/n}, n \geq 1$.

Exercice 2. Etudier la convergence simple et uniforme sur $[0, 1]$ des suites $(f_n)_{n\geq 0}$, $(g_n)_{n\geq 0}$ et $(h_n)_{n\geq 0}$ où l'on a $f_n(x) = (1 - x)^n$, $g_n(x) = x^n(1 - x)$ et $h_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}$.

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite des fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^3x(1 - nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in]1/n, 1]$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle f.
2. Calculer $\int_0^1 f_n(x)dx$. En déduire que la convergence de $(f_n)_{n\geq 1}$ n'est pas uniforme.
3. Pour quelle valeur de α a t on la même conclusion pour $f_n(x) = n^\alpha x(1 - nx)1_{\{[0,1/n^2]\}}$.
4. Montrer que l'on a les mêmes conclusions avec la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ des fonctions définies sur $[0, \pi/2]$ par $f_n(x) = n \sin x[\cos x]^n$.
5. Montrer que l'on a les mêmes conclusions avec la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ des fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^2x \exp(-\sqrt{n}x)$.

Exercice 4.

Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^2 + x + 1}{x^4 + n^2 + 2}dx$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^2x^3 + x + 1}{x^4 + n^2 + 2}dx.$$

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{nx + 1}, n \geq 0.$$

Montrer que cette suite converge simplement mais non uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que cette convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

Exercice 6. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{nx^2 + 1}, n \geq 0.$$

Montrer que cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Etudier la convergence uniforme de la suite $(f'_n)_{n\geq 0}$ et comparer la dérivée de la limite et la limite des dérivées.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, montrer la convergence uniforme sur $[-1, 1]$ de la série des fonctions $\sum f_n$:

1. $$f_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n + 1},$$

   $n \geq 1$. Montrer que l'on a une convergence normale sur $[0, 1]$ mais pas sur $[-1, 0]$.

2.
$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^n},$$
$n \geq 2$, Montrer que l'on a n'a pas de convergence normale ni sur $[0, 1]$ ni sur $[-1, 0]$.

Exercice 8. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+n}$, $n \geq 0$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, mais ne converge absolument en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit $I =]1, +\infty[$. Pour $x \in I$, on pose
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + x^n}.$$

1. Montrer que f est bien définie sur I.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur I.
3. Montrer que, pour tout $x \in I$,
$$\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x-1}$$
(Utiliser l'encadrement $x^n \leq 1 + x^n \leq 2x^n$).
4. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 1+} f(x)$.

Exercice 10. Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$f_n(x) = xe^{-n^2 x}, g_n(x) = xe^{-nx} \text{ et } h_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}(n \geq 2).$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum g_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que la série $\sum g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ mais ne converge pas uniformément.
4. Montrer que la série $\sum h_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ mais ne converge pas normalement.

Exercice 11. Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes :

i. $\sum (cosn\theta) z^n, \theta \in]0, \pi[$
ii. $\sum_{n\geq 1} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) z^n$
iii. $\sum \frac{n!}{2^n} z^n$
iv. $\sum 3^n z^{2n+5}$
v. $\sum \frac{(-2)^n}{n+1} z^{2n+1}$

Exercice 12. Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$.
2. $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2-1} x^n$
3. $\sum_{n\geq 2} \frac{n^2+4n-1}{n!} x^n$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n$

Exercice 13. On considère la série entière $\sum a_n x^n$ où $(a_n)_{n\geq 0}$ est la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et les relations $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$. On note R le rayon de convergence de la série et f sa somme définie sur $] - R, R[$.

1. Montrer que, pour $n \geq 0$, $1 \leq a_n \leq 2^{n+1} - 1$. En déduire que $R \geq 1/2$.
2. Calculer $f(x)$ pour $x \in] - R, R[$. En déduire que $R = 1/2$.
3. Exprimer, pour tout $n \geq 0$, a_n en fonction de n.